КРУГОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Шлейфер Ф.Г.

1. УЧИМСЯ ВЗВЕШИВАТЬ.

В этой статье будет изложен метод доказательства неравенств определённого вида. Подобные неравенства нередко встречаются в задачах для старшеклассников. В основе метода лежит идея “взвешивания” членов неравенства и затем применения к ним известного неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом нескольких положительных чисел. Рассмотрим параллельно 2 несложных примера неравенств с положительными числами a, b, c, и покажем, как работает метод: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$ и $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge\frac{a^3}{c^2}+\frac{b^3}{a^2}+\frac{c^3}{b^2}$.

Для каждого из неравенств сначала попытаемся “взвесить” первое слагаемое из его правой части при помощи слагаемых, записанных в его левой части, т.е. найти такие числа x, y, z, чтобы выполнялись соответственно равенства

$$\left(\frac{a^3}{bc}\right)^x\cdot\left(\frac{b^3}{ca}\right)^y\cdot\left(\frac{c^3}{ab}\right)^z=\frac{a^2}{c} \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{a^3}{bc}\right)^x\cdot\left(\frac{b^3}{ca}\right)^y\cdot\left(\frac{c^3}{ab}\right)^z=\frac{a^3}{c^2}.$$

Приравняем показатели степеней при одинаковых основаниях и придём к двум системам уравнений:

$$\begin{cases}3x-y-z=2\\-x+3y-z=0\\-x-y+3z=-1\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}3x-y-z=3\\-x+3y-z=0\\-x-y+3z=-2.\end{cases}$$

Заметим, что если сложить уравнения каждой из систем, то получится одно уравнение: x+y+z=1. Далее, решим указанные системы уравнений и запишем их решения: x=3/4, y=1/4, z=0 и, соответственно, x=1, y=−1/4, z=1/4. Как воспользоваться полученными решениями?

В первом случае поступим так. Умножим числа 3/4, 1/4, 0 на их общий знаменатель 4 и выпишем неравенство Коши для четырёх (3+1+0) чисел $\frac{a^3}{bc},\frac{a^3}{bc},\frac{a^3}{bc},\frac{b^3}{ca}$: $\frac{3\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}}{4}\ge\sqrt[4]{\left(\frac{a^3}{bc}\right)^3\cdot\frac{b^3}{ca}}=\frac{a^2}{c}$. Вместо “взвешиваний” оставшихся второго и третьего слагаемых из правой части неравенства из первого примера поступим проще: в последнем неравенстве совершим сначала замену символов a =>b, b=>c, c=>a, а затем ещё одну замену a=>c, b=>a, c=>b. Получим два аналогичных неравенства

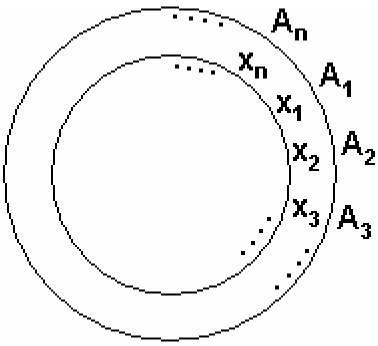
$$\frac{3\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}}{4}\ge\sqrt[4]{\left(\frac{b^3}{ca}\right)^3\cdot\frac{c^3}{ab}}=\frac{b^2}{a} \quad \text{и} \quad \frac{3\frac{c^3}{ab}+\frac{a^3}{bc}}{4}\ge\sqrt[4]{\left(\frac{c^3}{ab}\right)^3\cdot\frac{a^3}{bc}}=\frac{c^2}{b}.$$

Остаётся сложить все три полученных неравенства и получим неравенство из первого примера. Для второго примера не удастся применить неравенство Коши так, как это сделано выше из-за отрицательности числа y=−1/4. Как же быть дальше?

Оказывается, это неравенство не удастся доказать просто потому, что оно неверно. Вот контрпример: a=3, b=3, c=1.

2. КРУГОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА.

Пусть $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ – конечная последовательность рациональных чисел. Круговым будем называть алгебраическое выражение $X(A)=x_1^{\mathbf{A}_1}\cdot x_2^{\mathbf{A}_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_n} + x_1^{\mathbf{A}_n}\cdot x_2^{\mathbf{A}_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_{n-1}} +\ldots\ldots+ x_1^{\mathbf{A}_2}\cdot x_2^{\mathbf{A}_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_1}$, где $x_1, x_2,\ldots,x_n$ принимают лишь положительные действительные значения.



Две концентрические окружности разобъём на n равных дуг и в концах дуг меньшей (большей) окружности по часовой стрелке запишем числа $x_1, x_2,\ldots,x_n$ $(A_1,A_2,\ldots,A_n$ соответственно). Закрепим меньшую окружность, а большую будем поворачивать по часовой стрелке. В те моменты, когда отмеченные точки большей окружности будут располагаться против отмеченных точек меньшей окружности, удобно выписывать слагаемые кругового выражения X(A). Заметим, что если поворачивать внешнюю окружность против часовой стрелки, то будут получаться те же самые члены кругового выражения, но в ином порядке, а именно: $X(A)=x_1^{\mathbf{A}_1}\cdot x_2^{\mathbf{A}_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_n} + x_1^{\mathbf{A}_2}\cdot x_2^{\mathbf{A}_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_1}+\ldots\ldots+$ $+ x_1^{\mathbf{A}_n}\cdot x_2^{\mathbf{A}_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_{n-1}}$. Из соображений симметрии предпочтительнее последняя запись кругового выражения.

Если $(B_1,B_2,\ldots\ldots,B_n)$ – ещё одна конечная последовательность рациональных чисел, то можно поставить вопрос, верно ли неравенство $X(A) \geq X(B)$ для всех положительных чисел $x_1, x_2,\ldots, x_n$? Такие неравенства назовём круговыми.

Покажем сначала, что круговое неравенство $X(A) \geq X(B)$ неверно, если $\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots+\mathbf{A}_n \neq \mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\ldots+\mathbf{B}_n$. Действительно, примем M=2 или M=1/2 так, чтобы выполнялось неравенство $M^{\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots+\mathbf{A}_n} < M^{\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\ldots+\mathbf{B}_n}$, и рассмотрим числа $x_1=x_2=\ldots=x_n=M$, для которых $X(A)=n\cdot M^{\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots+\mathbf{A}_n}$, $X(B)=n\cdot M^{\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2+\ldots+\mathbf{B}_n}$. Легко видеть, что для данных чисел выполняется противоположное неравенство: $X(A) < X(B)$.

Далее будем рассматривать лишь ситуацию, когда $A_1+A_2+\ldots+A_n=$ $=B_1+ B_2+\ldots+ B_n$. Кроме того можно полагать, что $A_1+A_2+\ldots+A_n \neq 0$, т.к. в противном случае достаточно одновременно умножить X(A) и X(B) на $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$.

Для данного кругового неравенства $X(A) \geq X(B)$ будем рассматривать систему линейных уравнений (1):

$$(1)\quad \begin{cases} \mathbf{A}_1\cdot y_1+ \mathbf{A}_2\cdot y_2 +\ldots+ \mathbf{A}_n\cdot y_n= \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_2\cdot y_1+ \mathbf{A}_3\cdot y_2 +\ldots+ \mathbf{A}_1\cdot y_n= \mathbf{B}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A}_n\cdot y_1+ \mathbf{A}_1\cdot y_2 +\ldots+ \mathbf{A}_{n-1}\cdot y_n=\mathbf{B}_n. \end{cases}$$

Как появилась эта система уравнений? Давайте попытаемся, как вначале, “взвесить” первое слагаемое из X(B) при помощи слагаемых из X(A).

Подберём такие рациональные числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$, чтобы выполнялось равенство: $(x_1^{\mathbf{A}_1}\cdot x_2^{\mathbf{A}_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_n})^{\mathbf{y}_1}\cdot(x_1^{\mathbf{A}_2}\cdot x_2^{\mathbf{A}_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_1})^{\mathbf{y}_2}\cdot\ldots\cdot(x_1^{\mathbf{A}_n}\cdot x_2^{\mathbf{A}_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_{n-1}})^{\mathbf{y}_n}=$ $=x_1^{\mathbf{B}_1}\cdot x_2^{\mathbf{B}_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{B}_n}$. Приравнивая показатели степеней с основаниями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ мы и получим систему уравнений (1) для нахождения чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Пусть система уравнений имеет неотрицательное решение $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$, причём можно полагать, что все числа в этом решении – рациональные числа. Если сложить уравнения в системе (1) и затем сократить на число $\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots+\mathbf{A}_n$, то придём к уравнению $y_1+y_2+\ldots+y_n=1$. В частности, справедливо равенство $y_1^0+y_2^0+\ldots+y_n^0=1$ и, следовательно, среди неотрицательных чисел $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ имеется хотя бы одно положительное. Приведём рациональные числа $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ к общему знаменателю: $y_1^0=m_1/k$, $y_2^0=m_2/k$, $y_3^0=m_3/k, \ldots, y_n^0=m_n/k$. Из системы уравнений (1) получаем числовые равенства:
$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\cdot m_1+\mathbf{A}_2\cdot m_2+\ldots+\mathbf{A}_n\cdot m_n=\mathbf{B}_1\cdot k \\ \mathbf{A}_2\cdot m_1+\mathbf{A}_3\cdot m_2+\ldots+\mathbf{A}_1\cdot m_n=\mathbf{B}_2\cdot k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A}_n\cdot m_1+\mathbf{A}_1\cdot m_2+\ldots+\mathbf{A}_{n-1}\cdot m_n=\mathbf{B}_n\cdot k. \end{cases}$$
Кроме того имеет место равенство $m_1+m_2+\ldots+m_n=k$. Рассмотрим, наконец, $m_1+m_2+\ldots+m_n$ алгебраических выражений (принимающих лишь положительные значения): m_1 выражений равных $x_1^{\mathbf{A}_1}\cdot x_2^{\mathbf{A}_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_n}$, m_2 выражений равных $x_1^{\mathbf{A}_2}\cdot x_2^{\mathbf{A}_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_1}$, ..., m_n выражений равных $x_1^{\mathbf{A}_n}\cdot x_2^{\mathbf{A}_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\mathbf{A}_{n-1}}$, и применим к ним неравенство Коши:
$$\frac{m_1\cdot x_1^{A_1}\cdot x_2^{A_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{A_n}+m_2\cdot x_1^{A_2}\cdot x_2^{A_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{A_1}+\ldots\ldots+m_n\cdot x_1^{A_n}\cdot x_2^{A_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{A_{n-1}}}{k}\geq$$
$$\sqrt[k]{x_1^{A_1m_1+A_2m_2+\ldots+A_nm_n}\cdot x_2^{A_2m_1+A_3m_2+\ldots+A_1m_n}\cdot\ldots\cdot x_n^{A_nm_1+A_1m_2+\ldots+A_{n-1}m_n}}$$
$=\sqrt[k]{x_1^{B_1k}\cdot x_2^{B_2k}\cdot\ldots\cdot x_n^{B_nk}}=x_1^{B_1}\cdot x_2^{B_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{B_n}$. Затем совершим круговую перестановку чисел: $x_1 \Rightarrow x_n$, $x_2 \Rightarrow x_1$, $x_3 \Rightarrow x_2, \ldots, x_n \Rightarrow x_{n-1}$. Другими словами, повернём меньшую из двух концентрических окружностей на угол $2\pi/n$ по часовой стрелке. И выпишем соответствующее неравенство
$$\frac{m_1\cdot x_1^{A_2}\cdot x_2^{A_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{A_1}+m_2\cdot x_1^{A_3}\cdot x_2^{A_4}\cdot\ldots\cdot x_n^{A_2}+\ldots\ldots+m_n\cdot x_1^{A_1}\cdot x_2^{A_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{A_n}}{k}\geq$$
$\sqrt[k]{x_1^{B_2k}\cdot x_2^{B_3k}\cdot\ldots\cdot x_n^{B_1k}}=x_1^{B_2}\cdot x_2^{B_3}\cdot\ldots\cdot x_n^{B_1}$. Аналогичным образом получим остальные $n-2$ неравенства. Остаётся заметить, что сложив все n неравенств, мы и получим круговое неравенство $X(A)\geq X(B)$. Итак, если

система уравнений (1) обладает неотрицательным решением, то мы умеем доказывать круговое неравенство $X(A) \geq X(B)$. Если же у системы уравнений (1) нет неотрицательного решения, то и неравенство $X(A) \geq X(B)$ неверно и это будет установлено ниже.

<u>Замечание</u>. Рассмотренные выше круговые неравенства представляют собою часть класса более общих неравенств, связанных с группами подстановок. Кстати, круговые неравенства соответствуют циклическим группам подстановок. Но материал этот выходит за рамки данной статьи. Его можно найти в книге [2], стр. 95.

3. КАК ПОСТРОИТЬ КОНТРПРИМЕР.

Противоречивым в неотрицательной области уравнением называют следующее уравнение: $c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n=d$, где все коэффициенты меньше или равны 0, а $d\geq 1$. Очевидно, что такое уравнение не имеет неотрицательных решений. Но, оказывается, справедливо (обратное) утверждение: система линейных уравнений с действительными коэффициентами тогда и только тогда не имеет неотрицательных решений, когда некоторая сумма этих уравнений с какими-то коэффициентами является противоречивым уравнением в неотрицательной области. Прочитать об этом можно в [1], стр. 65 и [2], стр. 83.

Возвращаемся к системе линейных уравнений (1), которая, увы, не имеет неотрицательных решений. Согласно критерию, приведённому выше, существуют числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такие, что после сложения уравнений из системы (1), умноженных предварительно на указанные числа, получится противоречивое уравнение в неотрицательной области: $(\mathbf{A}_1p_1+\mathbf{A}_2p_2+\ldots+$
$+\mathbf{A}_np_n)\cdot y_1+(\mathbf{A}_2p_1+\mathbf{A}_3p_2+\ldots+\mathbf{A}_1p_n)\cdot y_2+\ldots+(\mathbf{A}_np_1+\mathbf{A}_1p_2+\ldots+\mathbf{A}_{n-1}p_n)\cdot y_n=$
$=\mathbf{B}_1p_1+\mathbf{B}_2p_2+\ldots+\mathbf{B}_np_n$. Кстати, совсем нетрудно найти некоторое решение системы линейных неравенств
$$\begin{cases} \mathbf{A}_1p_1+\mathbf{A}_2p_2+\ldots+\mathbf{A}_np_n \leq 0 \\ \mathbf{A}_2p_1+\mathbf{A}_3p_2+\ldots+\mathbf{A}_1p_n \leq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A}_np_1+\mathbf{A}_1p_2+\ldots+\mathbf{A}_{n-1}p_n \leq 0 \\ \mathbf{B}_1p_1+\mathbf{B}_2p_2+\ldots+\mathbf{B}_np_n \geq 1. \end{cases}$$
Как это сделать? Объяснения можно найти в [1], стр. 57 и [2], стр. 72.

Давайте рассмотрим теперь числа $x_1=n^{p_1}, x_2=n^{p_2}, \ldots x_n=n^{p_n}$ и подсчитаем $X(A)$ и $X(B)$. Действительно, $X(A)=n^{\mathbf{A}_1p_1+\mathbf{A}_2p_2+\ldots+\mathbf{A}_np_n}+n^{\mathbf{A}_2p_1+\mathbf{A}_3p_2+\ldots+\mathbf{A}_1p_n}+\ldots+$
$+n^{\mathbf{A}_np_1+\mathbf{A}_1p_2+\ldots+\mathbf{A}_{n-1}p_n} \leq 1+1+\ldots+1=n$ и $X(B)=n^{\mathbf{B}_1p_1+\mathbf{B}_2p_2+\ldots+\mathbf{B}_np_n}+\ldots \geq n+\ldots > n$, т.е. $X(A) < X(B)$.

Вот, пожалуй, и всё, что я хотел рассказать в этой статье.

ЛИТЕРАТУРА.

[1] Солодовников А.С., Системы линейных неравенств. “Наука”, Москва, 1977.

[2] Шлейфер Ф.Г., Алгебра−2 (учебное пособие для студентов пединститутов). Арзамасский пединститут, 1993.

[3] Шлейфер Ф.Г., Круговые неравенства. “Математика в школе”, №3, 1994.