ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. ГЛАВНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ.

Шлейфер Ф.Г.

1. СНАЧАЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРИМЕРЫ.

В известной задаче требуется доказать, что число $\mathbf{A}=\underbrace{111......111}_{\mathbf{3}^n}$ делится на $\mathbf{3}^{n}$.

Можно дополнить условие этой задачи, а именно доказать, что **A** не делится на $\mathbf{3}^{n+1}$. Это как раз и означает, что $\mathbf{3}^{n}$ – главный делитель **A**. Более обще: натуральное число **a** называем главным делителем натурального числа **n**, если **n** делится на **a** и, кроме того, НОД(**a**, **n**/**a**)=**1**. Так, **4** и **2** – делители числа **20**. Но первый является главным делителем, а второй – нет. Когда делитель числа **n** является степенью $\mathbf{p}^{m}$ простого числа, то легко показать, что главным он будет тогда и только тогда, когда **n** не делится $\mathbf{p}^{m+1}$. Задача, приведённая выше, является в некотором смысле основой для данной статьи. Так, ниже часто будут встречаться числа, записываемые при помощи двух цифр: 0,1. Но записи эти будем рассматривать не только в привычной десятичной системе счисления, а в произвольных k–ичных системах счисления, где k=2,3,4,…. ([4], [5]).

Рассмотрим запись цифр, состоящую из **n** цифр, где на последнем месте находится 1, а все остальные цифры – нули: $\underbrace{00...01}_{\mathbf{n}}$. Эта запись будет являться кирпичиком для построения требуемых нам чисел. Итак, вот эти числа: A(m,n) – число, записанное при помощи m кирпичиков, указанных выше. Естественно, не будем записывать нули из первого кирпичика. Например, A(3,4) = 100010001, A(5,1) = 11111. Чем же интересны эти числа? Вот их основное свойство: A(m,n)·A(n,1)=A(mn,1). Проще всего доказать это равенство, произведя умножение столбиком. Приведём два факта (так называем эти утверждения потому, что их доказательства очевидны).

<u>Факт 1</u>. $A(m,n)=10^{n(m-1)}+10^{n(m-2)}+\ldots+10^{n}+1$.

<u>Факт 2</u>. Если m делится на p, то A(m,1) делится на A(p,1), т.к. A(m,1)=A(p,1)·A(m/p,p).

<u>Задача 1</u>. Пусть $m_1, m_2,\ldots, m_t$ – произвольные натуральные числа, большие 1. Тогда верно равенство: $A(m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_t, 1) =A(m_1, m_2\cdot m_3\cdot\ldots\cdot m_t)\cdot A(m_2, m_3\cdot m_4\cdot\ldots\cdot m_t)\cdot \ldots\cdot A(m_{t-1}, m_t)\cdot A(m_t, 1)$.

Задача 2. Доказать равенство $A(m, pn)\cdot A(n, p)=A(mn, p)$.

Прошу прощения за задачи, но не обещаю, что их дальше не будет. Если материал кажется Вам трудным, то перед тем как бросить чтение или перейти дальше очень рекомендую поиграть с указанными числами, т.е. разобрать все приведённые равенства для конкретных значений n, m, p, t. Это очень поможет. Кстати, это же будет помогать и в дальнейшем.

2. НЕМНОГО ТЕОРИИ (НИКАК НЕ ОБОЙТИСЬ).

Лемма. $A(n,m)-n$ делится на $(10-1)\cdot A(m,1)$. Далее, если p – общий делитель чисел n и $A(m,1)$, то $A(n,m)-n$ делится на $A(m,1)\cdot p$.

Доказательство. Справедливы равенства $A(n,m)-n = 10^{m(n-1)} + 10^{m(n-2)} + \ldots + 10^{m}+1-n = (10^{m(n-1)} -1) + (10^{m(n-2)} -1) + \ldots + (10^{m} -1) = (10-1)\cdot[A(m(n-1), 1) + A(m(n-2), 1) + \ldots + A(m, 1)] = (10-1)\cdot A(m, 1)\cdot[A(n-1, m) + A(n-2, m) + \ldots + A(1, m)]$, откуда уже следует первое утверждение леммы. Кстати, почему 10–1 не спешим заменить на 9? Потому что система счисления не обязятельно десятичная!

Обозначим теперь $\mathbf{V}=[A(n-1,m)-(n-1)]+[A(n-2,m)-(n-\mathbf{2})]+\ldots+[A(1,m)-1]$. Как уже доказано выше, **V** делится на $(10-1)\cdot A(m, 1)$, следовательно, **V** делится на p. Кроме того, $A(n,m)-n = (10-1)\cdot A(m, 1)\cdot[\mathbf{V}+ n(n-1)/2]$. Остаётся проверить, что $(10-1)\cdot n(n-1)/2$ делится на p. По условию n делится на p. И если p – нечётное число, то доказательство закончено. Как быть, если p – чётное число? Вспомним, что $A(m,1)$ делится на p, следовательно, основание системы счисления – нечётное число, а тогда уже (10–1) – число чётное. Закончили.

Замечание. Если число n делится на простое число p и мы пишем, что $p^{\mathbf{i}}$ – главный делитель n, то предполагается, что $0<\mathbf{i}$.

Теорема 1. Пусть p – простое число, n и m – натуральные числа. Пусть далее $P^{\mathbf{i}}$ – главный делитель $A(n,1)$, причём $0< \mathbf{i}$, а $p^{\mathbf{j}}$ – главный делитель m. Тогда $p^{\mathbf{i+j}}$ – главный делитель числа $A(nm, 1)$.

Доказательство. 1) Если число s делится на n, то из леммы следует, что $A(p, s)-p$ делится на $p^{\mathbf{2}}$. Действительно, $A(s, 1)$ делится на $A(n, 1)$ (Факт 2), а уже $A(n, 1)$ делится на p (по условию). Вывод: $A(p, s)$ делится на p и не делится на $p^{\mathbf{2}}$, другими словами, p – главный делитель $A(p, s)$.

2) Полагаем $m = p^{\mathbf{j}}\cdot t$, где t уже не делится на p. Как мы знаем справедливы равенства $A(nm, 1) = A(p^{\mathbf{j}}\cdot n\cdot t, 1) = A(p, p^{\mathbf{j-1}}\cdot n\cdot t)\cdot A(p, p^{\mathbf{j-2}}\cdot n\cdot t)\cdot\ldots\cdot A(p, p\cdot n\cdot t)\cdot A(p, n\cdot t)\cdot A(t, n)\cdot A(n, 1)$, если $0<\mathbf{j}$. А, если $\mathbf{j}=0$, то в правой части останутся лишь два последних сомножителя. Все сомножители, кроме двух последних имеют p в

качестве своего главного делителя (об этом говорили в п.1). По условию $p^{\mathbf{i}}$ – главный делитель A(n,1). Наконец, A(t, n) вообще не делится на p, т.к. A(t, n) – t делится на A(n, 1) и, следовательно, делится на p, и в то же время t не делится на p. Пришло время соединить все главные делители – степени p: $\mathbf{j}+0+\mathbf{i}$. Доказательство теоремы 1 закончено.

Следующая теорема имеет некоторое сходство с задачей, приведённой в начале статьи. Именно, пусть простое число p – делитель числа (10–1). На какую степень p делится число A(n,t), где n и t – произвольные натуральные числа? Теорема 2 отвечает на этот вопрос.

<u>Теорема 2</u>. 1) Если n не делится на p, то и A(n,t) не делится на p.

2) Пусть теперь n делится на p и $p^{\mathbf{i}}$ – главный делитель n. Тогда

2a) Если 2<p или t – чётное число, то $p^{\mathbf{i}}$ – главный делитель A(n,t).

2b) Если p=2 и t – нечётное число, и $p^{\mathbf{j}}$ – главный делитель A(2,1), то $p^{\mathbf{i+j-1}}$ – главный делитель A(n,t).

<u>Доказательство</u>. 1) В доказательстве леммы показано, что A(n,t) – n делится на (10–1) и, следовательно, делится на p. А т.к. n не делится на p, то и A(n, t) не будет делиться на p.

2) Пусть m – произвольное натуральное число. В доказательстве леммы установлено равенство A(p, m)–p = (10–1)·A(m, 1)·[**V**+ p(p–1/2], где **V** делится на (10–1)·A(m, 1). Следовательно, A(p, m)–p делится на $p^{\mathbf{2}}$, если 2<p. Кроме того, число A(m,1)–m делится на (10–1), т.е. делится и на p. Таким образом, при p=2 и чётном m число A(m,1) также – чётное и, следовательно, снова A(p, m)–p делится на $p^{\mathbf{2}}$. Вывод: если 2<p или m – чётное число, то A(p, m) делится на p, но не делится на $p^{\mathbf{2}}$.

2a) Полагаем сейчас $n=p^{\mathbf{i}}\cdot q$, где q уже не делится на p. Равенство A(n,t) = $A(p, p^{\mathbf{i-1}}\cdot q\cdot t)\cdot A(p, p^{\mathbf{i-2}}\cdot q\cdot t)\cdot\ldots\ldots\cdot A(p, q\cdot t)\cdot A(q, t)$ немедленно получится из равенства задачи 1, если его домножить на A(t, 1). Как показано выше, все множители, кроме последнего, в правой части равенства делятся на p, и не делятся на $p^{\mathbf{2}}$. Последний множитель не делится на p (доказано в п.1). Таким образом, доказано, что $p^{\mathbf{i}}$ – главный делитель A(n,t).

2b) Пусть теперь p=2 и t – нечётное число. Рассмотрим равенство A(n, t) = A(n/2,2t)·A(2,t). Как уже показано в пунктах 1 и 2a, $2^{\mathbf{i-1}}$– главный делитель A(n/2,2t). Остаётся выяснить на какую степень числа 2 делится число A(2, t)? По лемме обе разности A(t, 1)–t и A(t, 2)–t делятся на (10–1), а значит делятся и на 2. Но тогда числа A(t, 1) и A(t, 2) являются нечётными. Наконец, из равенства A(2,1)·A(t, 2)= =A(2t, 1)=A(t, 1)·A(2 ,t) следует, что числа A(2,1) и A(2, t) делятся на одну и ту же степень числа 2. Теорема доказана.

Теорема 3. (Наконец-то последняя) Пусть p – простое число, причём k (вспомним, k – основание системы счисления) не делится на p. Среди чисел $A(1,1)$, $A(2,1)$, $A(3,1)$,…, $A(p,1)$ непременно найдутся кратные p. Обозначим через $A(m, 1)$ первое из них. Тогда число $A(n,1)$ будет делиться на p тогда и только тогда, когда n делиться на m.

Доказательство. При делении на p могут встретиться p различных остатков: $0,1,2,\ldots,(p-1)$. Следовательно, при делении на p числа $A(1,1)$, $A(2,1)$,…, $A(p,1)$ либо будут давать полный набор остатков, либо встретятся два одинаковых остатка. В первом случае найдётся число $A(i,1)$ кратное p (очевидно, $i\neq1$). Во втором случае обозначим через $A(j, 1)$ и $A(j+i,1)$ числа с одинаковыми остатками при делении на p. Таким образом, $A(i,1)\cdot k^j = A(j+i,1)-A(j, 1)$ делится на p, а тогда и $A(i,1)$ делится на p (снова очевидно, $i\neq1$).

Переходим ко второму утверждению теоремы. Пусть сначала n делится m. Тогда $A(n,1)=A(m,1)\cdot A(n/m,m)$ тоже делится на p. Наоборот, пусть $A(n,1)$ делится на p. Разделим с остатком n на m: $n=m\cdot a+b$ $(b<m)$, и допустим, что $0<b$. Тогда $A(b,1)= =A(n,1)-A(m\cdot a,1)\cdot k^{\mathbf{b}}$ делится на p, что противоречит минимальности m.

3. ПЕРЕХОДИМ К ПРАКТИЧЕСКИМ ВЫВОДАМ.

Пусть k и n – произвольные натуральные числа $(1<k)$, p – произвольное простое число. Зададимся вопросом: на какую максимальную степень p делится число k^n-1? Предлагаем следующую схему решения этой задачи.

a) Если k делится на p, то очевидно, что k^n-1 не может делиться на p. И далее будем предполагать, что k не делится на p.

b) Рассмотрим последовательность чисел $k-1$, k^2-1, k^3-1,…, k^p-1 и выберем из неё самый первый член k^m-1, который делится на p. Такой член непременно существует ввиду теоремы 3 и равенства $k^i-1=(k-1)\cdot A(i, 1)$.

c) Пусть $1<m$. Если n не делится на m, то $k^n-1=(k-1)\cdot A(n, 1)$ не делится на p, что следует из теоремы 3. Если теперь n делится на m, то обозначим через p^i – главный делитель $A(m,1)$ и через p^j – главный делитель n/m. Ввиду теоремы 1, p^{i+j} – главный делитель числа k^n-1.

d) Пусть теперь $m=1$, т.е. $(k-1)$ делится на p. Обозначим через p^i, p^j, p^t главные делители чисел n, $k+1$ и $k-1$ соответственно. Ввиду теоремы 2, число p^{i+t} является главным делителем k^n-1, если n делится на p или $2<p$.

В противном случае (т.е. p=2 и n – нечётное число) 2^{i+j+t} является главным делителем числа k^n–1 (также ввиду теоремы 2).

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. На какую степень числа 7 делится $4^{200!}-1$?

Решение. Среди чисел (4–1),(4^2–1), (4^3–1),… первым делящимся на 7 является 63=4^3–1, причём число это не делится на 7^2. Далее, среди чисел от 1 до 200 имеется 28 чисел кратных 7, также имеется 4 числа кратные 7^2, и нет ни одного кратного 7^3. Следовательно, n=200! имеет 7^{32} своим главным делителем. Таким образом (пункт c), 7^{33} – главный делитель числа $4^{200!}-1$.

Пример 2. Доказать, что среди последних 1981 цифры числа $1977^{(10^{1979})}$ ни разу не встретится цифра 3.

Решение. Обозначим n=10^{1979} и покажем, что 1977^n–1 делится на $4\cdot10^{1980}$, откуда уже будет следовать, что последние 1981 цифра числа 1977^n следующие: чётная цифра, затем 1979 нулей и, наконец, единица. Действительно, 2^3 – главный делитель числа 1976, следовательно, $1977^n-1 = 1976\cdot A(n,1)$ делится на 2^{1982} (пункт d). Далее, 5 является главным делителем числа A(4,1), следовательно, 1977^n–1 делится на 5^{1980} (пункт c).

Пример 3. Показать, что $5^{(676^n)}-1$ делится на 13^{2n+1} и не делится на 13^{2n+2}, где n=1,2,3,… .

Решение. Заметим, что 13 и 13^{2n} являются главными делителями чисел 5^4–1 и 676^n соответственно. Остаётся воспользоваться пунктом c.

Замечание. Метод, изложенный выше, можно с успехом применять для решения некоторых других задач на делимость чисел. Так, пусть нас интересует на какую степень простого числа p делится число k^n+1? Для решения достаточно найти главные делители p^i и p^j чисел $k^{2n}-1$ и k^n-1 соответственно и записать ответ: p^{i-j}. Более общая постановка задачи: требуется выяснить на какую степень простого числа p делится число $k^{m(n-1)}+k^{m(n-2)}+\ldots+k^m+1=A(n, m)$? Достаточно воспользоваться известным равенством $A(n, m)\cdot A(m, 1)=A(nm,1)$ и дважды применить изложенную выше схему соответственно к числам A(m, 1) и A(nm, 1).

Пример 4. На какую степень числа 31 делится число $6^{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 1981}+1$?

Решение. Полагаем k=6 и t=1·3·5·… ·1981. Далее нужно проверить, что A(6,1) делится на 31, но A(2,1),…, A(5,1) не делятся на 31. Т.к. t не делится на 6, то (пункт а) A(t, 1) не делится на 31. С другой стороны 2t уже делится на 6 и имеет своим главным делителем 31^{33}. В соответствии с пунктом с получаем, что 31^{34} – главный делитель A(2t, 1), и то же верно для искомого числа A(2, t).

Пример 5. Показать, что $7^{26\cdot 19^n}+7^{13\cdot 19^n}+1$ делится на 19^{n+1} и не делится на 19^{n+2}, где n=0,1,2,… .

Решение. Пусть k=7, $m=13\cdot 19^n$ тогда $A(3,m)=7^{26\cdot 19^n}+7^{13\cdot 19^n}+1$. Остаётся проверить, что 7–1 и 7^2-1 не делятся на 19, а 7^3-1 делится на 19, и, следовательно (пункт а), A(m, 1) не делится на 19. А вот A(3m, 1) уже имеет главным делителем число 19^{n+1}(пункт с).

Пример 6. Последовательность натуральных чисел задана следующим образом: $a_1=1$, $a_{n+1}=18^{2a_n}+18^{a_n}+1$ (n=1,2,3,…). Доказать, что a_{101} делится на 7^{300} и не делится на 7^{301}.

Решение. Пусть k=18 и отметим, что 7^3 является главным делителем числа 18^3-1, а числа 18^2-1 и 18–1 не делятся на 7 . А т.к. a_n не делится на 3, то (пункт а) $A(a_n, 1)$ не делится на 7. Далее, справедливо равенство $A(3a_n, 1)= A(a_n, 1)\cdot a_{n+1}$, т.к. $a_{n+1}=A(3, a_n)$. Если 7^i – главный делитель числа a_n, то (пункт с) 7^{i+3} будет являться главным делителем для a_{n+1}. Остаётся применить индукцию.

4. ЕЩЁ ТРИ СЛЕДСТВИЯ.

Для формулировки и доказательства следствий нам потребуется известная (малая) теорема Ферма, которая приводится во многих книгах по элементарной математике ([1], задача 240; [2], задача 206).

Теорема 4.(Ферма) Пусть p – простое число и натуральное число a не делится на p. Тогда $a^{p-1}-1$ делится на p.

Следствие 1. Пусть p – простое число, n и k – натуральные числа, причём k не делится на p. Тогда $k^{p^{n-1}\cdot(p-1)}-1$ делится на p^n.

Доказательство. Пусть, как обычно, k – основание системы счисления. Теперь покажем, что A(p,(p–1)·b) делится на p при любом натуральном b. Действительно, по лемме A(p,(p–1)·b) – p делится на (10–1)·A((p–1)·b, 1), т.е. делится на (10–1)·A(p–1, 1)= k^{p-1}–1, что делится на p по теореме 4.

Теперь рассмотрим равенства $k^{p^{n-1}\cdot(p-1)}-1 = (10-1)\cdot A(p^{n-1}\cdot(p-1), 1) = A(p, p^{n-2}\cdot(p-1))\cdot\ldots\cdot A(p,(p-1))\cdot A(p-1, 1)\cdot(10-1)$. Как доказано выше, все сомножители, кроме последних двух, делятся на p, а произведение двух последних равно k^{p-1}–1, что тоже делится на p.

Следствие 2. (теорема Эйлера) Разложим натуральное число n (1<n) в произведение степеней различных простых число: $n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{m_s}$. Тогда для произвольного натурального числа k (k не делится на $p_1, p_2,\ldots, p_s$) число $k^{p_1^{m_1-1}(p_1-1)\cdot p_2^{m_2-1}(p_2-1)\cdot\,\ldots\,\cdot p_s^{m_s-1}(p_s-1)}-1$ делится на n.

Доказательство вытекает из следствия 1.

Следствие 3. Пусть p – простое число и натуральное число k не делится на p. Пусть далее, t – наименьшее натуральное число такое, что k^t–1 делится на p. Выше (теорема 4) отмечалось, что k^{p-1}–1 тоже делится на p. Так вот оба числа и k^t–1, и k^{p-1}–1 делятся на одну и ту же степень p.

Доказательство. По теореме 3 число (p–1) делится на t. Допустим сначала, что (10–1) не делится на p. Тогда A(t, 1) делится на p и (p–1)/t не делится на p. Следовательно, в силу теоремы 2, числа A(t, 1) и A(p–1, 1) делятся на одну и ту же степень p. Пусть теперь (10–1) делится на p, т.е. t=1. По теореме 2 (пункт a) A(p–1, 1) не делится на p. Следовательно, числа k^{p-1}–1=(10–1)·A(p–1, 1) и (10–1) делятся на одну и ту же степень p.

5. ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ.

Задача 3. Если делитель m числа A(s,1) является одновременно главным делителем числа n, то m является также главным делителем всех чисел вида A(n, t), где t – произвольное натуральное число кратное s. Доказать.

Задача 4. Пусть $p^{\mathbf{i}}$ – главный делитель числа A(s,1), где p – простое число, 0<**i** и s не делится на p. Пусть, далее, t и n – произвольные натуральные числа, лишь только НОД(t, ps)=1. Тогда $p^{n+\mathbf{i}}$ – главный делитель числа $A(s, p^n\cdot t)$. Доказать.

Задача 5. Пусть p – простой нечётный делитель числа 11. Через n, m, i обозначим натуральные числа такие, что m не делится на p, а p^i – главный делитель числа 11. Тогда p^{n+i} – главный делитель числа $10^{p^n \cdot m} - (-1)^m$. Доказать.

Задача 6. Для натуральных чисел n и m доказать равенство НОД(A(n, 1), A(m, 1))=A(НОД(n, m), 1).

Задача 7. a) Если натуральные числа t и m не имеют общих делителей, кроме 1, то A(n, t) делится на A(m,1) тогда и только тогда, когда n делится на m. Доказать.

b) Число A(n, t) делится на 11 лишь в следующих двух случаях:

b1) t – нечётно, n – чётно;

b2) t –чётно, n делится на 11. Доказать.

Пример 7. На какую степень числа 7 делится $3^{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 101}+1$?

Пример 8. a) Показать, что $3^{2^n}-1$ делится на 2^{n+2} и не делится на 2^{n+3} ([3], задача 122a).

b) Показать, что $2^{3^n}+1$ делится на 3^{n+1}([2], задача 224) и не делится на 3^{n+2} ([3], задача 122b).

Пример 9. На какую степень числа 61 делится $13^{183^n}-1$?

Пример 10. a) Доказать, что число составленное из 3^n единиц делится на 3^n ([1], задача 42) и не делится на 3^{n+1} ([3], задача 123).

b) Доказать, что если 2^m-1 делится на 5^n, то $5^n-5^{n-1} \le m$. ([1], задача 242).

Пример 11. Если p – простое число, $(p^{(p-1)!}-1)^{(p-2)}$ делится на $((p-1)!)^{(p-1)}$. Доказать.

6. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ПРИМЕРОВ.

Решение задачи 1. Доказательство провести индукцией по t или заменить в правой части каждый сомножитель на дробь: A(i, j)=A(ij, 1)/A(j, 1) и затем произвести сокращение, или умножение произвести «столбиком», начиная справа.

Решение задачи 2. Домножьте обе части равенства на A(p,1).

Решение задачи 3. Пусть имеется общий делитель a у чисел m и A(n, t)/m, т.е A(n, t) делится на am. Согласно лемме разность A(n, t) – n делится на A(t, 1) и, следовательно, делится на A(s, 1), что в свою очередь делится на m. В соответствии со вторым утверждением леммы, A(n, t) – n делится на A(t, 1)·m. Теперь можно утверждать, что A(n, t) – n делится на am. В начале отмечалось, что A(n, t) делится на am. Следовательно, n делится на am, а тогда a=1, т.к. m – главный делитель n.

Решение задачи 4. Пусть m – наименьшее натуральное число, для которого A(m, 1) делится на p (теорема 3). Тогда s делится на m (теорема 3). А вот $p^n \cdot t$ не делится на m и, следовательно $A(p^n \cdot t, 1)$ не делится на p. Теперь воспользуемся равенством $A(s, p^n \cdot t) \cdot A(p^n \cdot t, 1) = A(s \cdot p^n \cdot t, 1)$. По теореме 1 число, стоящее в правой части равенства имеет p^{i+n} в качестве главного делителя, а второй сомножитель слева не делится на p. Следовательно, p^{i+n} – главный делитель числа $A(s, p^n \cdot t)$.

Решение задачи 5. Применить теорему 1 раздельно в двух случаях: m – чётное число и m – нечётное число.

Решение задачи 6. Пусть n<m и разделим m с остатком на n: $m = n \cdot q + r$, причём $0 \le r < n$. Имеет место аналогичное равенство $A(m, 1) = A(nq, 1) \cdot 10^r + A(r, 1) = A(n, 1) \cdot A(q, n) \cdot 10^r + A(r, 1)$. Таким образом, выписывая строки алгоритма Евклида для чисел m и n и, одновременно записывая аналогичные равенства для A(m, 1) и A(n, 1), получим записи алгоритма Евклида, но уже для требуемых чисел.

Решение примера 11. Пусть q – произвольное простое число меньшее p. Обозначим через q^i главный делитель числа (p–1)!. Очевидно, что $q^{i(p-1)}$ будет главным делителем числа $((p-1)!)^{(p-1)}$. Ввиду теоремы 4, $p^{q-1} - 1 = (p-1) \cdot A(q-1, 1)$ делится на q. Если (p–1) не делится на q, то A(q–1, 1) делится на q. И далее, ввиду теоремы 1, A((p–1)!, 1) делится на q^{i+1} и тем более $(p^{(p-1)!} - 1)$ делится на q^{i+1}. Но как быть, если (p–1) делится на q? В этом случае согласно лемме A(q, 1)– q делится на (p–1), следовательно, A(q, 1) делится на q. Снова применяем теорему 1 и получаем, что A((p–1)!, 1) делится на q^i. А тогда $(p^{(p-1)!} - 1) = (p-1) \cdot A((p-1)!, 1)$ делится на q^{i+1}. Т.е. в обоих случаях $(p^{(p-1)!} - 1)^{(p-2)}$ делится на $q^{(p-2) \cdot (i+1)}$. Остаётся проверить, что $i(p-1) \le (p-2)(i+1)$ или $i+2 \le p$. На самом деле, среди чисел от 1 до (p–1) имеется не более (p–1)/q делящихся на q, не более $(p-1)/q^2$ делящихся на q^2, не более $(p-1)/q^3$ делящихся на q^3, и т.д.. Таким образом, $i \le (p-1)/q + (p-1)/q^2 + (p-1)/q^3 + \ldots < (p-1)/(q-1) \le (p-1)$.

ЛИТЕРАТУРА.

[1] Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом, Избранные задачи и теоремы Элементарной математики, часть 1, изд. 2, Москва, 1954.

[2] Сборник задач Московских математических олимпиад, составитель А.А.Леман, “Просвещение”, Москва, 1965.

[3] Н.Б.Васильев, А.А.Егоров, Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков, “Учпедгиз”, Москва, 1963.
[4] С.В.Фомин, Системы счисления, серия «Популярные лекции по математике», выпуск 40, “Наука”, Москва, 1987.
[**5**] И.М.Яглом, Системы счисления, “Квант”, №6, 1970, стр.2.
[**6**] И.М.Яглом, Две игры со спичками, “Квант”, №2, 1971, стр.4.
[7] Ф.Г.Шлейфер, Позиционные системы счисления, адрес статьи: http://fish1821.narod.ru/Statyi.html