О квадратном трёхчлене замолвите слово

Феликс Шлейфер

Конечно, все думают, что знают всё о квадратном трёхчлене, много раз решали задачи с ним. И в главном все правы. Но бывают задачи и приёмы решения немного не вписывающиеся в привычную схему, в частности, их иногда давали на вступительных экзаменах в МГУ им.Ломоносова. Я изложу эту тему так, как излагал её для учителей и старшеклассников. Итак, вперёд.

Определение. Квадратным трёхчленом с неизвестной величиной (пусть это будет x) называют алгебраическое выражение вида $F=ax^2+bx+c$, где a,b,c – числовые коэффициенты (иногда эти коэффициенты содержат дополнительные неизвестные) и $a \neq 0$.

Примеры. $3x^2-5x+7$, $2x^2+11x$, $4x^2-(2+y)x+(1+y^2)$.

§ 1. Выделение полного квадрата

Выделить полный квадрат – это важное действие, которое нужно уметь делать с квадратным трёхчленом. При этом используем известные тождества $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Сначала примеры.

Дан квадратный трёхчлен F. Требуется выделить в нём полный квадрат.

1. $F = x^2-6x+1 = x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-8 = (x-3)^2-8$. В этом примере нам повезло, т.к. у числа 6 имеется делитель 2. В следующем примере такого везения не будет и потому умножим трёхчлен на 4 (почему не достаточно умножить на 2?)
2. $F = x^2+5x+3$. $4F = 4x^2+20x+12 = (2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 5+5^2-13 = (2x+5)^2-13$.
3. $F = 3x^2-x+1$. В данном примере сначала умножим трёхчлен на 3, чтобы старший член ($3x^2$) был полным квадратом: $3F = 9x^2-3x+3$. Затем, как в предыдущем примере, умножим трёхчлен на 4: $12F = 36x^2-12x+12 =$ $= (6x)^2- 2\cdot(6x)\cdot 1 +1^2+11 = (6x-1)^2+11$.

Аналогично примеру 3 поступаем в общем случае $F = ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$). Сначала умножим трёхчлен на a, и затем умножим на 4: $4aF =$ $4a^2x^2+4abx+4ac = (2ax)^2+2\cdot(2ax)\cdot b+b^2- (b^2-4ac) = (2ax+b)^2- D$, где буквой D обозначают дискриминант $D = b^2-4ac$ данного трёхчлена $F = ax^2+bx+c$.

Давайте разберём несколько задач, на которых увидим использование способа выделения полного квадрата в квадратном трёхчлене.

Задача 1. Найти наименьшее значение трёхчлена $F = 3x^2-7x+10$.

Решение. Выделяем полный квадрат $12F = (6x-7)^2+ 71$. Очевидно неравенство $(6x-7)^2\geq 0$, следовательно, $12F \geq 71$, причём наименьшее значение трёхчлена F равно $\frac{71}{12}$ и достигается оно при $x =\frac{7}{6}$.

Задача 2. Дано уравнение с двумя неизвестными $2x^2 - 6xy + 6y^2 = 9$. Найти наибольшее возможное значение y.
Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен с неизвестной x:
$F = 2x^2 - 6xy + 6y^2$, пока о неизвестной y ничего не скажем. Выделяем полный квадрат: $2F = (2x - 3y)^2 + 3y^2 = 18$. Очевидно $(2x - 3y)^2 \geq 0$, следовательно, $3y^2 \leq 18$. Таким образом, $-\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$, причём если $2x - 3y = 0$, то $y = \pm\sqrt{6}$. Итак, максимальное значение $y = \sqrt{6}$ и достигается оно при $x = \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

Давайте сделаем некоторые выводы из последнего решения. В квадратном трёхчлене было 2 неизвестные. Одну неизвестную мы "спрятали" в полный квадрат, а затем сделали вывод относительно неизвестной, оставшейся вне полного квадрата. Т.е. целесообразно "прятать" в полный квадрат те неизвестные, которые нас пока не интересуют.

Задача 3. Найти наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$.
Решение. Как сказано выше, попытаемся "спрятать" в полные квадраты неизвестные y и z. Рассмотрим квадратный трёхчлен
$F = z^2 - (x + y)z + (x^2 + 2y^2 + xy)$ с неизвестной z и выделим полный квадрат: $4F = (2z - x - y)^2 + (3x^2 + 7y^2 + 2xy)$. То, что осталось после выделения полного квадрата будем рассматривать, как новый квадратный трёхчлен с неизвестной y: $F_1 = 7y^2 + 2xy + 3x^2$. Выделим в F_1 полный квадрат $7F_1 = (7y + x)^2 + 20x^2$. Вернёмся к первоначальному трёхчлену F, но не забудем умножить равенство на 7:
$28F = 7(2z - x - y)^2 + (7y + x)^2 + 20x^2 = 28$. Значения полных квадратов – неотрицательные числа, следовательно, $20x^2 \leq 28$, и далее $-\sqrt{\frac{7}{5}} \leq x \leq \sqrt{\frac{7}{5}}$.

Причём, если полные квадраты равны 0, то $x = \pm\sqrt{\frac{7}{5}}$. Итак, наименьшее значение $x = -\sqrt{\frac{7}{5}}$ и достигается оно при $y = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{5}}$, $z = -\frac{3}{7}\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Ещё одно усилие требуется от нас. Встречаются задачи, в которых нужно найти наибольшее (или наименьшее) значение не конкретной неизвестной, а некоторого алгебраического выражения. Покажем, как преодолеть новую трудность на примере двух задач.

Задача 4. Числа x, y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \le 3$. Найти наибольшее значение выражения $x + 3y$.

Решение. Введём новую неизвестную $w = x+3y$ и затем заменим одну из “старых” неизвестных $x = w-3y$. Сформулируем заново задачу: числа y, w удовлетворяют неравенству $10y^2 - 5yw + w^2 \le 3$, нужно найти наибольшее значение w. Рассмотрим квадратный трёхчлен $F = 10y^2 - 5yw + w^2 \le 3$ с неизвестной y. Выделим полный квадрат $40F = (20y - 5w)^2 + 15w^2 \le 120$. Очевидно $(20y - 5w)^2 \ge 0$, следовательно, $15w^2 \le 120$ и далее $-2\sqrt{2} \le w \le 2\sqrt{2}$. Остаётся отметить, что $2\sqrt{2}$ – наибольшее значение w и достигается оно, если $20y - 5w = 0$, т.е. при $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 5. Числа a,b,c таковы, что $2a^2+b^2+c^2 = 3$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?

Решение. Введём новую неизвестную $w = a-2b+c$ и затем заменим одну из “старых” неизвестных $c = w - a + 2b$. Сформулируем заново задачу: числа a, b, w удовлетворяют уравнению $3a^2+5b^2+w^2-2aw+4bw-4ab =3$. Какое наименьшее значение может принимать w? Итак, будем пытаться «спрятать» в полные квадраты неизвестные a и b. Рассмотрим квадратный трёхчлен $F = 3a^2 - 2(2b+w)a + (5b^2 + w^2 + 4bw)=3$ с неизвестной a. Выделим полный квадрат $3F = (3a - 2b - w)^2 + (11b^2 + 2w^2 + 8bw) = 9$. Рассмотрим новый квадратный трёхчлен с неизвестной b, который остался после выделения полного квадрата: $F_1 = 11b^2 + 8bw + 2w^2$ и выделим в нём полный квадрат: $11F_1 = (11b + 4w)^2 + 6w^2$. Вернёмся к первоначальному трёхчлену F, но не забудем умножить равенство на 11:
$33F = 11(3a - 2b - w)^2 + (11b + 4w)^2 + 6w^2 = 99$. Значения полных квадратов – неотрицательные числа, следовательно, $6w^2 \le 99$, и далее
$-\frac{1}{2}\sqrt{66} \le w \le \frac{1}{2}\sqrt{66}$. Причём, если полные квадраты равны 0, то $w = \pm\frac{1}{2}\sqrt{66}$.
Итак, наименьшее значение $w = -\frac{1}{2}\sqrt{66}$ и достигается оно при $b = \frac{2}{11}\sqrt{66}$, $a = -\frac{1}{22}\sqrt{66}$, $c = -\frac{1}{11}\sqrt{66}$.

Упражнения.

1. Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению $2x^2+2y^2+z^2 + xy + xz + yz = 4$.
2. Числа x, y, z таковы, что $x^2+ 3y^2+ z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x+y-z$?
3. Числа x, y удовлетворяют неравенству $18x^2+ 22xy +7y^2 \le 10$. Найти наибольшее значение выражения $2x + y$.

§ 2. Корни квадратного трёхчлена и их расположение на числовой оси

Пусть D – дискриминант квадратного трёхчлена $F = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$.

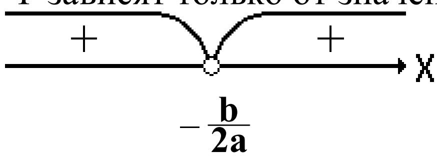
Предложение 1. Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен F не имеет корней и все его значения положительны (отрицательны), если $a > 0$ (если $a < 0$).

Доказательство. Выше было доказано, что $4aF = (2ax+b)^2 - D$. Выражение справа $(2ax+b)^2 - D$ принимает только положительные значения, т.к. $D < 0$. Таким, образом, произведение $4a \cdot F$ тоже принимает только положительные значения. А далее всё зависит от числа a: если $a > 0$, то и значения F положительны, если же $a < 0$, то и значения F отрицательны.

Предложение 2. Если $D = 0$, то квадратный трёхчлен F имеет единственный корень $x_1 = -\frac{b}{2a}$ и для всех остальных значений x значения квадратного трёхчлена положительны (отрицательны), если $a > 0$ (если $a < 0$).

Доказательство. Как уже знаем $4aF = (2ax+b)^2 - D = (2ax+b)^2$. Но выражение справа обращается в 0 единственный раз только при $x = -\frac{b}{2a}$.

При всех остальных значениях x значения $4a \cdot F$ положительны и далее значения трёхчлена F зависят только от значения числа a (об этом говорили в предложении 1).



– рисунок для $a > 0$.

Предложение 3. Если $0 < D$, то квадратный трёхчлен имеет два различных корня $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. И теперь квадратный трёхчлен можно записать в другом виде $F = a(x - x_1)(x - x_2)$. О значениях квадратного трёхчлена поговорим позже в предложении 5.

Доказательство. В высшей математике имеется теорема, которая утверждает, что для любого положительного числа D существует единственное положительное число d такое, что $D = d^2$, его принято обозначать так $d = \sqrt{D}$. Далее выделяем в трёхчлене полный квадрат $4aF = (2ax+b)^2 - D = (2ax+b)^2 - d^2 = (2ax+b-d)(2ax+b+d)$ – какую известную формулу здесь использовали? Наконец, приравниваем к 0 каждый из двух сомножителей и получаем корни квадратного трёхчлена $x_1 = \frac{-b-d}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+d}{2a}$. Продолжим цепочку равенств

$$4aF = (2ax+b-d)(2ax+b+d) = 2a\cdot\left(x+\frac{b-d}{2a}\right)\cdot 2a\cdot\left(x+\frac{b+d}{2a}\right) = 4a^2(x-x_2)(x-x_1)$$

и после сокращения на $4a$ получим $F = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Предложение 4. (Теорема Виета). Если $0 < D$, то корни x_1 и x_2 квадратного трёхчлена удовлетворяют следующим равенствам:
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Кроме того середина отрезка с концами x_1 и x_2 на числовой оси находится в точке $-\frac{b}{2a}$.

Доказательство. $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-d}{2a} \cdot \frac{-b+d}{2a} = \frac{b^2-d^2}{4a^2} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.
Пусть x_3 – середина указанного отрезка, т.е. $x_3 - x_1 = x_2 - x_3$ (так измеряют отрезки на числовой прямой), откуда и получаем $x_3 = -\frac{b}{2a}$.

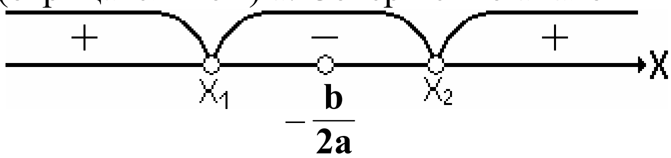
Задача 6. Составить квадратное уравнение с корнями $x_1 = 2-\sqrt{3}$ и $x_2 = 2+\sqrt{3}$.
Решение. Пусть $a = 1$ и $x^2+bx+c = 0$ – искомое уравнение. Тогда по теореме Виета $-b = x_1 + x_2 = 4$ и $c = x_1 \cdot x_2 = 1$. Остаётся проверить, что уравнение $x^2-4x+1 = 0$ действительно имеет указанные корни.

Задача 7. Известно, что квадратное уравнение $x^2+7x-11 = 0$ имеет два иррациональных корня x_1 и x_2. Не вычисляя корни доказать, что $x_1^4 + x_2^4$ – целое число.
Решение. Сначала подсчитаем $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-7)^2 - 2(-11) =$
$= 71$. Наконец, подсчитаем $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = 71^2 - 2(-11)^2 =$
$= 4799$.

Прежде чем сформулировать предложение 5 (между прочим, последнее!) договоримся о выражениях, которые будем использовать. Полагаем, что квадратный трёхчлен $F = ax^2+bx+c$ имеет два корня $x_1 < x_2$. Скажем, что число s (и соответствующая точка на числовой прямой) находится между корнями x_1 и x_2, если $x_1 < s < x_2$. Скажем, что число s (и соответствующая точка на числовой прямой) находится вне корней x_1 и x_2, если $s < x_1$ или $x_2 < s$. Скажем, что число s (и соответствующая точка на числовой прямой) находится слева от корней x_1 и x_2, если $s < x_1$. И, наконец, скажем, что число s (и соответствующая точка на числовой прямой) находится справа от корней x_1 и x_2, если $x_2 < s$.

Предложение 5. Если $0 < a$, то значения трёхчлена F положительны (отрицательны) для значений x вне корней (для значений x внутри корней). Если $a < 0$, то (всё наоборот) значения трёхчлена F положительны (отрицательны) для значений x внутри корней (для значений x вне корней).

Доказательство. Мы уже знаем, что $F = a(x - x_1)(x - x_2)$ – это отмечалось в предложении 3. Пусть сначала число s находится между корнями x_1 и x_2, т.е. $0 < s - x_1$ и $s - x_2 < 0$. Тогда произведение $(s - x_1)(s - x_2)$ – отрицательно и значение F будет отрицательным (положительным) при положительном (отрицательном) a. Совершенно аналогично разбирается второй случай.



– рисунок для $a > 0$.

А теперь 4 примера.

1. Дан квадратный трёхчлен x^2+px+q с двумя корнями. Когда можно утверждать, что один корень меньше 3, а другой корень больше 3? Очень просто: число 3 должно находиться внутри корней, т.е. значение трёхчлена при $x=3$ должно быть отрицательным, что и даёт ответ: $9+3p+q < 0$.

2. Не решая уравнения $2x^2-13x+17 = 0$ проверить, что один корень этого уравнения меньше 2, а другой корень больше 3. Сначала вычислим дискриминант $D=33$, т.е. у данного уравнения есть два корня. Далее, числа 2 и 3 находятся внутри корней, т.к. $F(2)= -1<0$ и $F(3)= -4<0$.

3. Когда у квадратного трёхчлена x^2-8x+k оба корня больше 1? Во-первых, корни должны существовать, т.е. $D=64-4k>0$, и далее $k < 16$. Во-вторых, число 1 должно располагаться слева от корней. Как это проверить? Нужно проверить два условия: число 1 должно быть вне корней, т.е. $0< F(1)=k-7$, и число 1 должно быть меньше середины отрезка с концами в корнях, т.е. $1< 4$ (вспомним предложение 4). Вот ответ: $7<k<16$.

4. При каких k оба корня уравнения $3x^2-kx+27=0$ меньше -2? Корни должны существовать, т.е. $D=k^2-324>0$, следовательно, $k <-18$ или $18<k$. Далее, число -2 должно находиться вне корней, т.е. $F(-2)=2k+39>0$, следовательно, $-19{,}5 < k$. Но этого не достаточно, т.к. числа вне корней могут находиться как слева от корней, так и справа от корней. Нам нужно только справа от корней, поэтому должно выполняться неравенство (середина отрезка с концами в корнях) $\frac{k}{6}<-2$, следовательно, $k<-12$. Собираем вместе полученное: $-19{,}5<k<-18$.

Далее решим несколько задач.

Задача 8. При каких значениях a уравнение $2x^2-(3a-5)x+ a^2- 4a = 0$ имеет корни различных знаков?

Решение. Сначала рассмотрим дискриминант $D=(3a-5)^2-8(a^2- 4a)=$

$= a^2+2a+25=(a+1)^2+24$ – он положителен при любом a, т.е. всегда есть два корня. Далее, число 0 должно находиться внутри корней, т.е. $F(0)=a^2-4a<0$. Когда квадратный трёхчлен a^2-4a с неизвестной a принимает отрицательные значения? Когда a находится внутри корней этого трёхчлена: $0<a<4$.

<u>Задача 9</u>. Найти все значения a, при которых корни квадратного уравнения $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ неотрицательны.
<u>Решение</u>. Сначала рассмотрим случай, когда нет у нас квадратного трёхчлена, т.е. a=0. Мы получаем уравнение $6x+2=0$ с единственным отрицательным корнем, т.е. a=0 не подходит. Далее вычислим дискриминант $D=4(a+3)^2-4a(a+2)=16a+36$. Если D=0, т.е. $a=-\frac{9}{4}$, то у квадратного трёхчлена имеется единственный корень $x_1=-\frac{2(a+3)}{2a}=\frac{1}{3}$.

Таким образом, $a=-\frac{9}{4}$ нужно записать в ответ. Осталось рассмотреть последний (самый сложный) случай, когда D>0, т.е. $a>-\frac{9}{4}$, и данное уравнение имеет 2 корня. Число 0 должно располагаться на числовой оси слева от корней (но, возможно, меньший корень равен 0 и этот случай можно разобрать отдельно). Таким образом, 0 должен находиться вне корней и 0 должен быть меньше полусуммы корней. Начнём с полусуммы: $0<-\frac{2(a+3)}{2a}$, т.е. $-\frac{9}{4}<a<0$. Теперь вспомним, что $F(0)\le 0$ (почему допускаем $F(0)=0$?), т.к. 0 находится вне корней и a<0. Получаем $a+2\le 0$ и окончательно в этом случае $-\frac{9}{4}<a\le -2$.

Вот ответ: $-\frac{9}{4}\le a\le -2$.

<u>Задача 10</u>. При каких значениях a уравнение $x^2+2(a-4)x+2a-5=0$ имеет хотя бы один положительный корень?
<u>Решение</u>. Начнём с дискриминанта $D=4(a-4)^2-4(2a-5)=4a^2-40a+84$ – получили новый квадратный трёхчлен с неизвестной a и корнями $a_1=3$ и $a_2=7$. Лёгкая проверка показывает, что при a=3 данное уравнение имеет единственный положительный корень, а при a=7 данное уравнение имеет единственный отрицательный корень.
Теперь разбираем основной случай $a<3$ или $7<a$, когда данное уравнение имеет два корня. Число 0 должно находиться на числовой оси или между корнями уравнения (один положительный корень), или совпадать с меньшим корнем (также один положительный корень), или слева от корней (два положительных корня). Разберём

последовательно все три случая. 1) Число 0 находится между корнями уравнения, т.е. F(0)= 2a–5<0. Откуда находим $a<\frac{5}{2}$. 2) Меньший корень уравнения равен 0, т.е. F(0)=0, $a=\frac{5}{2}$, второй корень уравнения равен 3. Это нам подходит. 3) Число 0 находится слева от корней, т.е. F(0) = 2a–5>0 и 0 <–a+4. Что приводит к $\frac{5}{2}$<a<4. Выше мы видели, что или a<3 или 7<a. С учётом этого получаем ответ: a<3 (для положительного дискриминанта). Окончательный ответ: $a \le 3$.

Задача 11. Найти все те значения параметра s, при каждом из которых все корни уравнений $\mathbf{x^2+\frac{8}{s}x-2s=0}$ и $\mathbf{x^2+\frac{6}{s}x-s=0}$ различны и перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.

Решение. Отметим, что $s \ne 0$ и начнём, как обычно с дискриминантов. Первый дискриминант $D_1=\mathbf{\frac{8}{s^2}(8+s^3)}$ положителен, если –2<s, второй дискриминант $D_2=\mathbf{\frac{4}{s^2}(9+s^3)}$ также положителен при указанном s. Но что же дальше? Обозначим корни первого уравнения так: x_1 и x_2, и обозначим F второй квадратный трёхчлен. Тогда из двух чисел $F(x_1)$ и $F(x_2)$ одно должно быть положительным и одно – отрицательным (всё равно какое). Эти два случая можно просчитать одновременно, если рассмотреть одно неравенство $F(x_1) \cdot F(x_2) < 0$. Остаётся вычислить $F(x_1) \cdot F(x_2)$ и вспомнить о теореме Виета: $x_1+x_2=-\mathbf{\frac{8}{s}}$, $x_1 \cdot x_2=-2s$. После всех вычислений получим неравенство $\mathbf{\frac{8+s^3}{s}}<0$. Числитель положителен (вспомните дискриминант!), следовательно, $-2<s<0$.

Задача 12. Найти все значения k, при которых оба корня уравнения $2x^2-3kx+k^2-k-2=0$ больше 3.

Решение. Дискриминант $D=(k+4)^2$, т.е. $k \ne -4$. Далее, число 3 должно находиться на числовой оси слева от корней уравнения, т.е. 0<F(3)= $=k^2-10k+16$ (число 3 вне корней) и $3<\mathbf{\frac{3k}{4}}$ (число 3 меньше полусуммы корней). Окончательно, $8<k$.

Задача 13. Найти все значения k, при которых один корень уравнения $(k+2)x^2-5kx+3k+1=0$ меньше 2, а другой больше 3.

Решение. Ясно, что $k \ne -2$, т.к. единственный корень у уравнения нам не подходит. Далее, дискриминант $D=13k^2-28k-8$ должен быть положительным, следовательно, $k<\frac{14-10\sqrt{3}}{13}\approx-0{,}2554$ или $2{,}409\approx\approx\frac{14+10\sqrt{3}}{13}<k$. Наконец, потребуем, чтобы числа 2 и 3 находились внутри корней данного уравнения. При $-2<k$ (старший коэффициент квадратного трёхчлена – положительный) нужно, чтобы $F(2)<0$ и $F(3)<0$, что выполняется, только если $\frac{19}{3}<k$. Аналогично при $k<-2$ (старший коэффициент квадратного трёхчлена – отрицательный) нужно, чтобы $0<F(2)$ и $0<F(3)$, что выполняется, только если $k<3$. И окончательно $\frac{19}{3}<k$ или $k<-2$.

Задача 14. Найти все значения k, при которых неравенство $kx^2-7kx+3k+2>0$ выполняется для всех x.
Решение. Сначала рассмотрим случай $k=0$, при котором нет у нас квадратного трёхчлена: $2>0$ – выполняется для всех x. Теперь вычислим дискриминант $D=37k^2-8k$. Если $0\le D$, то у данного квадратного трёхчлена есть корни и уже для этих корней требуемое неравенство не выполняется. Таким образом, $D<0$, т.е. $0<k<\frac{8}{37}$ и, ввиду предложения 1, требуемое неравенство выполняется для всех x. Запишем ответ: $0\le k<\frac{8}{37}$.

Задача 15. Найти все значения k, при которых каждое число из отрезка [3;6] является решением неравенства $2x^2-3kx+2<0$.
Решение. Как обычно начинаем с дискриминанта $D=9k^2-16$. Если $D\le 0$, то данное неравенство вообще не имеет решений (предложения 1 и 2). Далее полагаем, что $0<D$, т.е. $k<-\frac{4}{3}$ или $\frac{4}{3}<k$. Если обозначим через x_1,x_2 корни данного трёхчлена, то интервал $(x_1;x_2)$ представляет собою множество всех решений данного неравенства. Т.е. числа 3 и 6 должны находиться в этом интервале или, другими словами, должны находиться внутри корней: $20-9k<0$ и $74-18k<0$. Получаем ответ: $\frac{37}{9}<k$.

Упражнения.

4. Найти все значения k, при которых квадратный трёхчлен $kx^2-(5k+1)x-4$ имеет два корня x_1,x_2, причём $x_1<-2<x_2$.

5. При каких значениях k оба корня уравнения $7x^2+kx-3=0$ меньше 2 (больше 2)?

6. Найти все те значения параметра s, при каждом из которых все корни равнений $x^2+3x+2s=0$ и $x^2+6x+5s=0$ различны и перемежаются, т.е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.