ИЩЕМ СУММЫ

Шлейфер Ф.Г.

1. ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ.

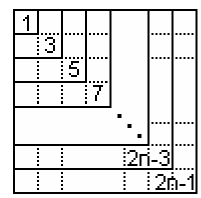
Хотя материал этой статьи не нов, полагаю, что он будет полезен многим читателям. Две очень известные суммы когда−то, ещё в старших классах, навели меня на мысль, как подсчитывать суммы в общих случаях. Вот эти две суммы:

$\frac{1}{100 \cdot 101}+\frac{1}{101 \cdot 102}+\ldots+\frac{1}{999 \cdot 1000}$ и $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)$. Но интерес представляют даже не сами суммы, а те приёмы, которыми их подсчитывают:

$$\frac{1}{100 \cdot 101}+\frac{1}{101 \cdot 102}+\ldots+\frac{1}{999 \cdot 1000}=\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)+\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)=$$

$=\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}$ и $1+3+5+\ldots+(2n-1)=1+(2^2-1)+(3^2-2^2)+\ldots+$

$+(n^2-(n-1)^2)=n^2$, что наглядно видно на рисунке



.

Итак, сформулируем этот приём в виде двух теорем.

<u>Теорема 1</u>. Пусть требуется найти сумму $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. Если известна функция $g(x)$, которая удовлетворяет равенствам $g(i)-g(i-1)=a_i$ для каждого $i=1,2,3,\ldots,n$, то также справедливо равенство $S_n=g(n)-g(0)$.

Доказательство. $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = (g(1)-g(0)) + (g(2)-g(1)) + \ldots+$ $+(g(n)-g(n-1)) = g(n)-g(0)$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть существует функция $f(x)$, которая является результатом для суммы $a_1+a_2+\ldots+a_m = f(m)$ при всех $m=1,2,3,\ldots,n$. Тогда можно указать функцию $g(x)$, которая удовлетворяет равенствам $g(i)-g(i-1)=a_i$ для каждого $i=1,2,3,\ldots,n$.

Доказательство. Примем $g(x)=f(x)-f(0)$ и запишем очевидные равенства: $a_i=(a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}+a_i)-(a_1+a_2+\ldots+a_{i-1})=f(i)-f(i-1)=(f(i)-f(0))-(f(i-1)-f(0))=$ $g(i)-g(i-1)$.

Итак, мы вполне теоретически готовы для нахождения разнообразных сумм. Далее последовательно рассмотрим суммы разных видов.

1. КАЖДОЕ СЛАГАЕМОЕ В СУММЕ ЯВЛЯЕТСЯ МНОГОЧЛЕНОМ

Теорема 3. Для каждого многочлена $a(x)$ степени k существует такой многочлен $g(x)$ степени $k+1$, что справедливо тождество $g(x)-g(x-1)=a(x)$.

Доказательство проведём индукцией по числу k. Начнём с $k=0$, т.е. $a(x)=a_0$ −константа отличная от 0. Возьмём в качестве $g(x) = a_0\cdot x$ и проверим: $g(x)-g(x-1)=a_0\cdot x-a_0\cdot(x-1) = a_0=a(x)$.

Пусть уже утверждение верно для любых многочленов, степень которых меньше k. И рассмотрим многочлен $a(x)$ степени k со старшим членом. $a_0\cdot x^k$. Начнём с одночлена $g_1(x)= x^{k+1}$. Заметим, что старший член многочлена $g_1(x)-g_1(x-1)$ равен $(k+1)\cdot x^k$, и, следовательно, при вычитании многочленов $a(x)-(a_0/(k+1))\cdot(g_1(x)-g_1(x-1))$ их старшие члены − $a_0\cdot x^k$ − уничтожатся, и получим многочлен степени меньше k или вообще нулевой многочлен. По предположению индукции найдётся многочлен (степени k или меньше, или нулевой) $g_2(x)$ такой что $g_2(x)-g_2(x-1) = a(x)-(a_0/(k+1))\cdot(g_1(x)-g_1(x-1))$. Теперь понятно, что в качестве искомого многочлена $g(x)$ достаточно взять $g(x) = g_2(x)+(a_0/(k+1))\cdot g_1(x)$.

Далее в этом пункте только примеры.

Пример 1. Вычислить сумму $1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2$.

Решение. $a_i= i^2$ −многочлен степени 2 . Ищем многочлен 3−й степени $g(x)=A\cdot x^3+B\cdot x^2+C\cdot x+D$, удовлетворяющий условию $g(x)-g(x-1)=x^2$. В тождестве $A\cdot x^3+B\cdot x^2+C\cdot x+D-A\cdot(x-1)^3-B\cdot(x-1)^2-C\cdot(x-1)-D = x^2$ раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 3A=1 \\ -3A+2B=0 \\ A-B+C=0. \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений: $A=1/3$, $B=1/2$, $C=1/6$, $D=0$.

Таким образом, $g(x)=\dfrac{2x^3+3x^2+x}{6}$ и, окончательно, $1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2 =$

$$= g(n)-g(0)= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Пример 2. Вычислить сумму $1\cdot n+2\cdot(n-1)+\ldots.+n\cdot 1$.

Решение. $a_i = i\cdot(n+1-i)$ −многочлен степени 2. Ищем многочлен 3−й степени $g(x)=A\cdot x^3+B\cdot x^2+C\cdot x+D$, удовлетворяющий условию $g(x)-g(x-1)= =x\cdot(n+1-x)$. В тождестве $A\cdot x^3+B\cdot x^2+C\cdot x+D-A\cdot(x-1)^3-B\cdot(x-1)^2-C\cdot(x-1)-D =$

$= -x^2+(n+1)\cdot x$ раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x: $3A=-1$ Левая часть системы уравнений такая же, как

$-3A+2B=n+1$ в примере 1. Случайно?

$A-B+C=0$. Решим систему линейных уравнений:

$A=-1/3$, $B=n/2$, $C=(3n+2)/6$. Таким образом, $g(x)=\dfrac{-2x^3+3nx^2+(3n+2)x}{6}$

и, окончательно, $1\cdot n+2\cdot(n-1)+\ldots.+n\cdot 1= g(n)-g(0) = \dfrac{n^3+3n^2+2n}{6}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Пример 3. Вычислить сумму $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots.+n\cdot(n+1)^2$.

Решение. $a_i = i\cdot(i+1)^2$ −многочлен степени 3. Ищем многочлен 4−й степени $g(x)=A\cdot x^4+B\cdot x^3+C\cdot x^2+D\cdot x+E$, удовлетворяющий условию $g(x)-g(x-1)=x\cdot(x+1)^2$. В тождестве $A\cdot x^4+B\cdot x^3+C\cdot x^2+D\cdot x+E-A\cdot(x-1)^4-B\cdot(x-1)^3-C\cdot(x-1)^2-D\cdot(x-1)-E = x^3+2\cdot x^2+x$ раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 4A=1 \\ -6A+3B=2 \\ 4A-3B+2C=1 \\ -A+B-C+D=0. \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений:

$A=1/4$, $B=7/6$, $C=7/4$, $D=5/6$, $E=0$. Таким образом, $g(x)=\dfrac{3x^4+14x^3+21x^2+10x}{12}$.

И, окончательно, $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots.+n\cdot(n+1)^2 =g(n)-g(0) = \dfrac{3n^4+14n^3+21n^2+10n}{12}$.

Пример 4. Вычислить сумму $1^2\cdot(2n-1)+2^2\cdot(2n-3)+ 3^2\cdot(2n-5)+\ldots.+n^2\cdot 1$.

Решение. $a_i = i^2\cdot(2n-2i+1)$ −многочлен степени 3. Ищем многочлен 4−й степени $g(x)=A\cdot x^4+B\cdot x^3+C\cdot x^2+D\cdot x+E$, удовлетворяющий условию $g(x)-g(x-1)= x^2\cdot(2n-2x+1)$. В тождестве $A\cdot x^4+B\cdot x^3+C\cdot x^2+D\cdot x+E-A\cdot(x-1)^4-B\cdot(x-1)^3-C\cdot(x-1)^2-D\cdot(x-1)-E=-2x^3+(2n+1)\cdot x^2$ раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{cases} 4A=-2 \\ -6A+3B=2n+1 \\ 4A-3B+2C=0 \\ -A+B-C+D=0. \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений: $A=-1/2$, $B=(2n-2)/3$, $C=n$, $D=(2n+1)/6$, $E=0$. Таким образом, $g(x)=\dfrac{-3x^4+(4n-4)x^3+6nx^2+(2n+1)x}{6}$. И, окончательно,

$1^2\cdot(2n-1)+2^2\cdot(2n-3)+3^2\cdot(2n-5)+\ldots.+n^2\cdot 1= g(n)-g(0) = \dfrac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6}$.

2. А ДРОБНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ ТОЖЕ МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ?

Теорем больше не будет, и это само по себе отличная новость для многих. Но редко бывает бочка мёда без ложки дёгтя. Только для многочленных слагаемых можно гарантированно (спасибо теореме 3!) выбрать функцию g(x) также в виде многочлена. Во всех остальных случаях целесообразно пытаться привести (иногда домножая, иногда сокращая) равенство $g(i)-g(i-1)=a_i$ к виду многочленов. Но и после соответствующего преобразования нет гарантии, что требуемый многочлен существует.

Пример 5. Вычислить сумму $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$.

Решение. $a_i=1/i\cdot(i+1)$, причём требуется найти сумму S_{n-1} (не S_n, как прежде). Чтобы избавиться от знаменателя выберем g(x) так: $g(x)=h(x)/(x+1)$. Перепишем равенство $g(x)-g(x-1)=1/x\cdot(x+1)$, умножив на общий знаменатель, $x\cdot h(x)-(x+1)\cdot h(x-1)=1$ ($x\neq 0$ и $x\neq -1$). Уже нет необходимости выбирать степень многочлена h(x) больше степени многочлена справа (в данном случае 0, т.к. справа находится константа). Попытаемся выбрать $h(x)=c$ − константа. Тогда получаем $1=cx-c(x+1)=-c$, т.е нашли подходящую функцию $g(x)=-1/(x+1)$. Т.к. $x\neq 0$, то проверим отдельно равенство $\frac{1}{1\cdot 2}=g(1)-g(0)$. После чего получим ответ $S_{n-1}=g(n-1)-g(0)=-(1/n)+1$.

<u>Замечание</u>. Ещё раз обращаю Ваше внимание, что не для всякой суммы можно найти элементарную функцию g(x). Теорема 2 лишь обещает, что функция существует. Но не всегда она находится среди элементарных функций. Так, суммы $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ и $1!+2!+3!+\ldots+n!$ я не умею считать.

Пример 6. Вычислить сумму

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} .$$

Решение. $a_i=1/(i-1)\cdot i\cdot(i+1)$, где $i=n+1, n+2, n+3, \ldots, 2n$. Соответственно, получим $S_n=g(2n)-g(n)$, если подберём функцию g(x). Начнём искать функцию $g(x)=h(x)/x(x+1)$. Далее, $1/(x-1)\cdot x\cdot(x+1)=h(x)/x(x+1)-h(x-1)/(x-1)x=$ $=((x-1)\cdot h(x)-(x+1)\cdot h(x-1))/(x-1)\cdot x\cdot(x+1) \Rightarrow 1=(x-1)\cdot h(x)-(x+1)\cdot h(x-1)$. Т.к. слева стоит константа, попытаемся искать $h(x)=c$ − константа: $1=(x-1)\cdot c-(x+1)\cdot c$, т.е. подходит $c=-1/2$. Таким образом, найдена функция $g(x)=-1/2x(x+1)$. Теперь уже просто: $S_n=g(2n)-g(n)=\frac{3n+1}{4n(n+1)(2n+1)}$.

3. ДОБАВИМ ПОКАЗАТЕЛЬНУЮ ФУНКЦИЮ.

Пример 7. Вычислить сумму $(n+1)\cdot 1+(n+2)\cdot 2+(n+3)\cdot 2^2+\ldots.+(2n)\cdot 2^{n-1}$.

Решение. Запишем i–й член данной сумы $a_i=(n+i)\cdot 2^{i-1}$, где $i=1,2,\ldots,n$, и будем искать $g(x)$ в таком виде $g(x)=2^x\cdot h(x)$, где уже $h(x)$ – некоторый многочлен. Действительно, $(n+x)\cdot 2^{x-1}=g(x)-g(x-1)=2^x\cdot h(x)-2^{x-1}\cdot h(x-1)$, или после сокращения $n+x=2\cdot h(x)-h(x-1)$. Слева стоит многочлен первой степени. Но т.к. старшие члены справа не уничтожаются, то примем $h(x)=Ax+B$, и получим систему линейных уравнений для вычисления A и B:

$\begin{cases} A=1 \\ A+B=n. \end{cases}$ Таким образом, $A=1$ и $B=n-1$, и $g(x)=2^x\cdot(x+n-1)$. И окончательно $S_n=g(n)-g(0)=2^n\cdot(2n-1)-n+1$.

Пример 8. Вычислить сумму $1^3-2^3+3^3-\ldots.+(-1)^{n+1}\cdot n^3$.

Решение. Запишем i–й член данной сумы $a_i=(-1)^{i+1}\cdot i^3$, где $i=1,2,\ldots,n$. Будем искать $g(x)$ в таком виде $g(x)=(-1)^x\cdot h(x)$, где уже $h(x)$ – некоторый многочлен. Действительно, $(-1)^{x+1}\cdot x^3=(-1)^x\cdot h(x)-(-1)^{x-1}\cdot h(x-1)\Rightarrow$ $x^3=-h(x)-h(x-1)$, т.е.видно, что старшие члены многочленов справа не уничтожаются. Следовательно, будем полагать, что $h(x)=A\cdot x^3+B\cdot x^2+C\cdot x+D$ и тогда $x^3=-(A\cdot x^3+B\cdot x^2+C\cdot x+D)-(A\cdot(x-1)^3+B\cdot(x-1)^2+C\cdot(x-1)+D)=$ $-2A\cdot x^3+(3A-2B)\cdot x^2+(-3A+2B-2C)\cdot x+(A-2B+C-2D)$. Приравняем коэффициенты

$-2A=1$

$3A-2B=0$

$-3A+2B-2C=0$

$A-2B+C-2D=0$. Решим систему линейных уравнений: $A=-1/2$, $B=-3/4$, $C=0$, $D=1/8$. Получили функцию $g(x)=(-1)^x\cdot(-4\cdot x^3-6\cdot x^2+1)/8=(-1)^{x+1}\cdot(4\cdot x^3+6\cdot x^2-1)/8$. Остаётся записать сумму $S_n=g(n)-g(0)=((-1)^{n+1}\cdot(4n^3+6n^2-1)-1)/8$.

4. А КАК НАСЧЁТ ФАКТОРИАЛА?

Пример 9. Вычислить известную сумму $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots.+n\cdot n!$.
Очевидно $a_i=i\cdot i!$ и $g(x)$ будем искать в виде $g(x)=(x+1)!\cdot h(x)$. Запишем основное равенство: $x\cdot x!=(x+1)!\cdot h(x)-x!\cdot h(x-1)$, сократим его на $x!$: $x=(x+1)\cdot h(x)-h(x-1)$. Полагаем $h(x)=c$ – константа, и приравняем коэффициенты слева и справа:

$c=1$

$0=0$. Выпишем $g(x)=(x+1)!$. И запишем сумму $S_n= g(n)-g(0) =(n+1)!-1$.

В заключение предлагаю придумать новую задачу на подсчёт суммы. Начнём с того, что зададим функцию $g(x)=(-1)^x\cdot x!$. Теперь из основного равенства найдём $a_i =g(i)-g(i-1)= (-1)^i\cdot i!-(-1)^{i-1}\cdot(i-1)!= (-1)^i\cdot(i-1)!\cdot(i+1)$ или чуть иначе $a_i =(-1)^i\cdot(i+1)!/i$. Выпишем соответствующую сумму $-\frac{2!}{1}+\frac{3!}{2}-\frac{4!}{3}+\ldots+\frac{2011!}{2010}$. Вы удивитесь, если я скажу, что у нас готов ответ? Вот он: $S_{2010}= g(2010)-g(0) =(-1)^{2010}\cdot 2010!-1=2010!-1$.

Заметим, что в статье не рассматривались суммы с тригонометрическими функциями и биномиальными коэффициентами. В этих задачах своя специфика поиска функции $g(x)$.