ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Ф.Г.Шлейфер

Мы записываем (натуральные) числа при помощи 10 цифр, причём величина числа зависит не только от выбранных цифр, но и от их расположения в записи числа, и говорим, что число представлено в десятичной системе счисления. Существуют и другие системы счисления, например, программисты нередко "разговаривают" с компьютерами на языках двоичной и шестнадцатиричной систем счисления. Много интересных свойств вытекают только из факта записи чисел в той или другой позиционной системе счисления. О произвольных позиционных системах счисления поговорим в данной статье, а о применении их к решению задач на делимость чисел – в следующей "Делимость чисел". Но сначала поиграем с чашечными весами.

1. КАК ПОДОБРАТЬ НАБОР ГИРЬ ДЛЯ ЧАШЕЧНЫХ ВЕСОВ?

Пусть у нас имеются двухчашечные весы, на которых нужно взвешивать любой груз целочисленного веса, причём гири также имеют целочисленный вес и их разрешается класть лишь на одну чашу весов. Некоторые из гирь могут иметь одинаковый вес, но множество гирь данного веса непременно конечно. Расположим веса всех разновесных гирь в порядке возрастания: $\mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2 < \mathbf{a}_3 < \ldots$. Обозначим через $\mathbf{p}_k$ количество гирь, имеющих вес $\mathbf{a}_k$. Набор гирь назовём разрешающим, если с его помощью можно взвешивать любой груз целочисленного веса. Расмотрим примеры.

Пример 1. $\mathbf{a}_1=1$, $\mathbf{a}_2=10$, $\mathbf{a}_3=100, \ldots$, причём каждая гиря имеется в единственном экземпляре, т.е. $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_3=\ldots=1$. Легко догадаться, что уже груз веса 2 не удастся взвесить при помощи этих гирь.

Пример 2. $\mathbf{a}_1=1$, $\mathbf{a}_2=10$, $\mathbf{a}_3=100, \ldots$, причём теперь каждая гиря имеется в количестве 9, т.е. $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_3=\ldots=9$. Нетрудно увидеть, что взвешивание груза равносильно записи веса этого груза в привычной десятичной системе счисления ($537=5\cdot100+3\cdot10+7\cdot1$). Именно эта аналогия и позволяет лучше увидеть суть записи числа в позиционной системе счисления при помощи взвешиваний на чашечных весах.

Упражнение 1. Докажите, что набор гирь $\mathbf{a}_k=2^{\mathbf{k-1}}$ ($\mathbf{k}=1, 2, 3, \ldots$), $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_3=\ldots=1$ является разрешающим.

Когда набор гирь будет разрешающим? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 Набор гирь является разрешающим тогда и только тогда, когда выполнены два условия: a) $\mathbf{a_1}$=1 и b) для каждого натурального числа $\mathbf{k}$ имеет место неравенство $\mathbf{p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_k \cdot a_k \geq a_{k+1} - 1}$.

Доказательство. Необходимость установим методом от противного. Если $\mathbf{a_1} \neq 1$, то груз веса 1 нельзя взвесить. Если для некоторого $\mathbf{k}$ справедливо неравенство $\mathbf{p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_k \cdot a_k < a_{k+1}}$-1, то уже нельзя взвесить груз веса $\mathbf{a_{k+1}}$-1.

Достаточность. Методом индукции по числу $\mathbf{k}$ установим следующее утверждение: если $\mathbf{m \leq p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_k \cdot a_k}$, то груз веса $\mathbf{m}$ можно взвесить при помощи гирь весов $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_k}$.

База индукции. Пусть $\mathbf{k}$=1, т.е. $\mathbf{m \leq p_1 \cdot a_1}$. Очевидно, что груз веса $\mathbf{m}$ можно взвесить при помощи гирь веса $\mathbf{a_1}$=1.

Шаг индукции. Пусть утверждение справедливо для некоторого числа $\mathbf{k}$ и докажем его для числа $\mathbf{k}$+1. Возьмём груз произвольного веса $\mathbf{m}$ (лишь только $\mathbf{m \leq p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_{k+1} \cdot a_{k+1}}$) и разделим $\mathbf{m}$ на $\mathbf{a_{k+1}}$ с остатком, т.е. запишем равенство $\mathbf{m = q \cdot a_{k+1} + r}$, где $\mathbf{0 \leq r \leq a_{k+1} - 1 \leq p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_k \cdot a_k}$. Если $\mathbf{q \leq p_{k+1}}$, то для взвешивания груза веса $\mathbf{m}$ нужно сначала взвесить груз веса $\mathbf{r}$ при помощи гирь $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_k}$, а затем добавить ещё $\mathbf{q}$ гирь веса $\mathbf{a_{k+1}}$. Если $\mathbf{q > p_{k+1}}$, то полагаем $\mathbf{m = p_{k+1} \cdot a_{k+1} + t}$, причём $\mathbf{t \leq p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_k \cdot a_k}$ (т.к. по условию $\mathbf{m \leq p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_{k+1} \cdot a_{k+1}}$), и затем взвесим груз веса $\mathbf{t}$ при помощи гирь весов $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ и добавим к ним $\mathbf{p_{k+1}}$ гирь веса $\mathbf{a_{k+1}}$. ■

Замечание. Вернитесь снова к упражнению 1.

Полезное достаточное условие для набора гирь быть разрешающим найдём в теореме 2.

ТЕОРЕМА 2 Если $\mathbf{a_1 = 1}$ и для каждого натурального числа $\mathbf{k}$ имеет место неравенство $\mathbf{p_k < \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq p_k + 1}$, то данный набор гирь - разрешающий.

Доказательство. По условию имеем $\mathbf{\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1 \leq p_k}$ для каждого натурального числа $\mathbf{k}$. Далее, преобразуем сумму $\mathbf{p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_k \cdot a_k \geq}$

$$\mathbf{\left(\frac{a_2}{a_1} - 1\right) \cdot a_1 + \left(\frac{a_3}{a_2} - 1\right) \cdot a_2 + \ldots + \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1\right) \cdot a_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_{k+1} - a_k) =}$$

$= \mathbf{a_{k+1}} - 1$ и остается воспользоваться теоремой 1. ■

Замечание. Вернитесь снова к упражнению 1.

<u>Замечание</u>. Всюду ниже значения $p_1, p_2, p_3, \ldots$ полагаем такими же как в теореме 2.

Некоторую гирю из разрешающего набора назовём лишней, если и без неё набор гирь остаётся разрешающим. Вот мы подошли к последнему определению. Под оптимальным набором гирь будем понимать разрешающий набор, в котором нет лишних гирь, т.е. каждая гиря необходима для взвешивания хотя бы одного груза. Нетрудно заметить, что выкинув из разрешающего набора лишние гири, получим оптимальный набор (вообще говоря не единственный).

Рассмотрим один способ построения оптимального набора гирь при заданных весах $1=a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Полагаем $p_1^* = a_2 - 1$. Пусть уже определены числа $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_{k-1}^*$. Число p_k^* вычислим как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $p_1^* \cdot a_1 + p_2^* \cdot a_2 + \ldots + p_k^* \cdot a_k \geq a_{k+1} - 1$. Нетрудно проверить, что $p_k^* \geq 0$. Если окажется, что $p_k^* = 0$, то это означает, что в оптимальном наборе не окажется гирь веса a_k. Таким образом, гиря a_k содержится в оптимальном наборе, если выполнено неравенство $p_1^* \cdot a_1 + \ldots + p_{k-1}^* \cdot a_{k-1} < a_{k+1} - 1$. Как связаны между собой числа p_k и p_k^*? Всегда ли они совпадают?

<u>ТЕОРЕМА 3</u> Для каждого натурального k имеет место $p_k^* \leq p_k \leq p_k^* + 1$.

Доказательство. Для $k=1$ очевидно $p_1 = a_2 - 1 = p_1^*$. Пусть теперь $k > 1$, тогда $a_k - 1 \leq p_1^* \cdot a_1 + \ldots + p_{k-1}^* \cdot a_{k-1} \leq a_k + a_{k-1} - 2$ и

$a_{k+1} - 1 \leq p_1^* \cdot a_1 + \ldots + p_{k-1}^* \cdot a_{k-1} + p_k^* \cdot a_k \leq a_{k+1} + a_k - 2$. Откуда получаем $a_k - 1 + p_k^* \cdot a_k \leq a_{k+1} + a_k - 2$ и $a_{k+1} - 1 \leq a_k + a_{k-1} - 2 + p_k^* \cdot a_k$. После очевидных преобразований будем иметь $p_k^* \leq \dfrac{a_{k+1} - 1}{a_k}$, т.е. $p_k^* < p_k + 1$, и аналогично $\dfrac{a_{k+1} - a_{k-1} + 1}{a_k} \leq$ $\leq p_k^* + 1$, т.е. $p_k - 1 < \dfrac{a_{k+1} - a_k}{a_k} < \dfrac{a_{k+1} - a_{k-1} + 1}{a_k} \leq p_k^* + 1$. ■

<u>Пример 3</u>. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $a_3 = 100$, $a_4 = 1000, \ldots$, тогда $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 10$, т.е. $p_k = 9$. С другой стороны $a_{k+1} - 1 = \underbrace{999\ldots999}_{k} = 9 \cdot a_k + 9 \cdot a_{k-1} + \ldots + 9 \cdot a_1$, т.е. $8 \cdot a_k + 9 \cdot a_{k-1} + \ldots + 9 \cdot a_1 < a_{k+1} - 1$, следовательно, $p_k^* = 9$.

<u>Пример 4</u>. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $a_{k+2} = 9 \cdot a_{k+1} + 4 \cdot a_k$, где $k = 1,2,3,\ldots$. Тогда $9 < \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leq 10$, т.е. $p_k = 9$. Далее, (для $k > 1$) $a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k = \dfrac{a_{k+1} + 4a_{k-1} - 2}{12}$ (это будет показано позже), $9 \cdot (a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k) < 12 \cdot (a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k) = a_{k+1} + 4 \cdot a_{k-1} - 2$ $< a_{k+1} + a_k - 2$, $9 \cdot (a_1 + \ldots + a_{k-1}) + 8 \cdot a_k < a_{k+1} - 1$, т.е. $p_k^* = 9$.

Пример 5. Пусть $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 9 \cdot a_k + 1$, где $k = 1,2,3,\ldots$. Тогда $9 < \frac{a_{k+1}}{a_k} \le 10$, т.е. $p_k = 9$. С другой стороны $p_1^* = p_2^* = 9$, $p_3^* = p_4^* = \ldots = p_{11}^* = 8$, $p_{12}^* = 9$, и среди чисел p_k^* имеется бесконечно много как равных 8, так и равных 9. Докажите этот факт.

Но не хватит ли взвешивать? Перейдём к позиционным системам счисления.

2. ЗАПИСЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ.

Пусть дана произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ и вычислены числа $p_1^*, p_2^*, p_3^*, \ldots$ (как в §1). Под записью натурального числа m в данной позиционной системе счисления будем понимать представление этого числа в виде суммы $m = s_k \cdot a_k + s_{k-1} \cdot a_{k-1} + \ldots + s_1 \cdot a_1$, где числа $s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1$ - целые, причём $0 < s_k \le p_k^*$, $0 \le s_{k-1} \le p_{k-1}^*$, …, $0 \le s_1 \le p_1^*$.

Ввиду теоремы 1 и аналогии между записями натуральных чисел в позиционных системах счисления и взвешиваниями целочисленных грузов на чашечных весах можно сделать важный вывод: каждое натуральное число m можно записать в данной системе счисления $m = s_k \cdot a_k + s_{k-1} \cdot a_{k-1} + \ldots + s_1 \cdot a_1$, что принято записывать так $m = \overline{s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1}$.

Если среди чисел $p_1^*, p_2^*, p_3^*, \ldots$ существует наибольшее число p_t^* и для изображения каждого из чисел $0, 1, 2, \ldots, p_t^*$ используется только один символ, то все эти $p_t^* + 1$ символов называют цифрами. Так в примерах 3 и 4 множество цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Именно эти примеры используем далее для иллюстрации. Причём, привычную всем, десятичную систему счисления из примера 3 обозначим (∗), а позиционную систему счисления из примера 4 обозначим соответственно (∗∗).

Мы привыкли, что каждое (натуральное) число имеет единственную запись в системе (∗). Однако, это замечательное свойство не всегда выполняется в произвольных системах счисления.

Пример 6. В системе (∗∗) имеют место равенства: $95 = \overline{9,5}$ и $95 = \overline{1,0,1}$.

ТЕОРЕМА 3 Каждое натуральное число в каждой позиционной системе счисления имеет конечное множество записей.

Доказательство. Пусть m – натуральное число и $a_k > m$, тогда в запись $\mathbf{m}$ не войдут слагаемые, содержащие $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}, \mathbf{a}_{\mathbf{k}+1},\dots$. Остаётся заметить, что множество всех записей, содержащих $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{\mathbf{k}-1}$, конечно (и равно разности $(\mathbf{p}_1^*+1)\cdot(\mathbf{p}_2^*+1)\cdot\ldots\cdot(\mathbf{p}_{\mathbf{k}-1}^*+1)-1$). Следовательно, конечным будет также множество записей числа $\mathbf{m}$. ■

Замечание. Иногда удобно рассматривать обобщённые записи натуральных чисел: $\mathbf{m}=\mathbf{s}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{k}}+\mathbf{s}_{\mathbf{k}-1}\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{k}-1}+\ldots+\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{a}_1$, где первое слагаемое (или первые слагаемые) равно 0.

Научимся сравнивать лексикографически (т.е. как в словарях) две записи в данной системе счисления. Скажем, что запись $\overline{\mathbf{s}_{\mathbf{k}},\mathbf{s}_{\mathbf{k}-1},\dots,\mathbf{s}_1}$ больше записи $\overline{\mathbf{u}_{\mathbf{n}},\mathbf{u}_{\mathbf{n}-1},\dots,\mathbf{u}_1}$, если $\mathbf{k}>\mathbf{n}$ или $\mathbf{k}=\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}_{\mathbf{k}}>\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ или $\mathbf{k}=\mathbf{n}$ и найдётся такой номер $\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}\le\mathbf{k}$), что первые цифры в записях совпадают: $\mathbf{s}_{\mathbf{k}}=\mathbf{u}_{\mathbf{k}},\dots,\mathbf{s}_{\mathbf{i}}=\mathbf{u}_{\mathbf{i}}$, но $\mathbf{s}_{\mathbf{i}-1}>\mathbf{u}_{\mathbf{i}-1}$. Зачем об этом говорить? Ведь в привычной десятичной системе счисления (*) бо́льшие числа обладают бо́льшими записями. Но, увы, это замечательное свойство выполняется не во всех системах счисления.

Пример 7. Сейчас записи рассматриваем в системе (**). Запись $\overline{1,3,0}$ лексикографически больше записи $\overline{9,8}$ и вместе с этим $\overline{1,3,0}=124>98=\overline{9,8}$. С другой стороны $\overline{1,0,0}$ лексикографически больше, чем $\overline{9,5}$, но $\overline{9,5}=95>94=\overline{1,0,0}$.

Таким образом, в системе счисления (**) бо́льшее число может иметь (лексикографически) ме́ньшую запись. Прямо скажем - факт малорадостный. Неужели нет возможности сравнивая записи автоматически сравнивать сами числа? Оказывается, всё не так уж плохо, нужно только рассматривать "правильные" записи чисел в данной системе счисления.

3. ПРАВИЛЬНЫЕ ЗАПИСИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ.

Из всех записей натурального числа $\mathbf{m}$ в данной системе счисления (а их - конечное множество по теореме 3) выберем лексикографически наибольшую и назовём её правильной записью числа $\mathbf{m}$.

Упражнение 2. Если $A\ge\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$, то правильная запись A содержит не менее $\mathbf{k}$ цифр. Как узнать, является ли данная запись правильной?

ЛЕММА 1. Запись $\overline{\mathbf{s}_{\mathbf{k}},\mathbf{s}_{\mathbf{k}-1},\dots,\mathbf{s}_1}$ является правильной тогда и только тогда, когда для каждого $\mathbf{i}=1,2,\dots,\mathbf{k}$ справедливо неравенство $\mathbf{a}_{\mathbf{i}+1}>\overline{\mathbf{s}_{\mathbf{i}},\mathbf{s}_{\mathbf{i}-1},\dots,\mathbf{s}_1}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\overline{\mathbf{u}_{\mathbf{n}},\mathbf{u}_{\mathbf{n}-1},\dots,\mathbf{u}_1}$ – правильная запись числа $\overline{\mathbf{s}_{\mathbf{k}},\mathbf{s}_{\mathbf{k}-1},\dots,\mathbf{s}_1}$. Числа $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ равны, т.к. иначе $\mathbf{n}>\mathbf{k}$ и $\overline{\mathbf{u}_{\mathbf{n}},\mathbf{u}_{\mathbf{n}-1},\dots,\mathbf{u}_1}\ge\mathbf{a}_{\mathbf{n}}\ge$

$\geq \mathbf{a}_{k+1} > \overline{\mathbf{s}_k,\mathbf{s}_{k-1}, \ldots, \mathbf{s}_1} = \overline{\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_{n-1}, \ldots, \mathbf{u}_1}$ – противоречие. Если, далее, предположим, что $\mathbf{u}_k = \mathbf{s}_k$, $\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{s}_{k-1}, \ldots, \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{s}_{i+1}$ и $\mathbf{u}_i > \mathbf{s}_i$, то $\overline{\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_{k-1}, \ldots, \mathbf{u}_1} \geq \overline{\mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_i, 0, \ldots, 0} \geq$
$\geq \overline{\mathbf{u}_k, \ldots, \mathbf{u}_{i+1}, (\mathbf{s}_i+1), 0, \ldots, 0} = \overline{\mathbf{s}_k, \ldots, \mathbf{s}_{i+1}, \mathbf{s}_i, 0, \ldots, 0} + \mathbf{a}_i > \overline{\mathbf{s}_k, \ldots, \mathbf{s}_{i+1}, \mathbf{s}_i, 0, \ldots, 0} +$
$+ \overline{\mathbf{s}_{i-1}, \ldots, \mathbf{s}_1} = \overline{\mathbf{s}_k,\mathbf{s}_{k-1}, \ldots, \mathbf{s}_1} = \overline{\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_{k-1}, \ldots, \mathbf{u}_1}$ – снова приходим к противоречию.

Необходимость. Пусть $\overline{\mathbf{s}_k,\mathbf{s}_{k-1}, \ldots, \mathbf{s}_1}$ - правильная запись, в частности, $\mathbf{a}_{k+1} > \overline{\mathbf{s}_k,\mathbf{s}_{k-1}, \ldots, \mathbf{s}_1}$. Допустим теперь, что существует число $\mathbf{i}$ $(2 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k})$ такое, что $\mathbf{a}_i \leq \overline{\mathbf{s}_{i-1},\mathbf{s}_{i-2}, \ldots, \mathbf{s}_1}$. Если таких чисел несколько, то выберем наибольшее из них. Нетрудно видеть, что справедливы неравенства $\mathbf{a}_{i+1} > \overline{\mathbf{s}_i,\mathbf{s}_{i-1}, \ldots, \mathbf{s}_1} \geq (\mathbf{s}_i+1)\cdot\mathbf{a}_i$, т.е. в правильной записи числа $\overline{\mathbf{s}_i,\mathbf{s}_{i-1}, \ldots, \mathbf{s}_1}$ имеется $\mathbf{i}$ цифр и первая цифра превышает $\mathbf{s}_i$. Таким образом, заменив в записи $\overline{\mathbf{s}_k,\mathbf{s}_{k-1}, \ldots, \mathbf{s}_1}$ последние $\mathbf{i}$ цифр на соответствующую правильную запись, получим запись лексикографически бо́льшую первоначальной. А это противоречит тому, что первоначальная запись - правильная. ■

<u>Пример 8</u>. В системе счисления (∗∗) запись $\overline{1,3,0}$ является правильной, т.к. $\mathbf{a}_4 = 886 > 124 = \overline{1,3,0}$, $\mathbf{a}_3 = 94 > 30 = \overline{3,0}$, $\mathbf{a}_2 = 10 > 0$. С другой стороны запись $\overline{2,9,5}$ не является правильной, т.к. $\mathbf{a}_3 = 94 \leq 95 = \overline{9,5}$.

<u>Упражнение 3</u>. Докажите, что после удаления первой цифры (первых цифр) из правильной записи снова получим правильную (обобщённую) запись. А, если удалить цифры из середины или конца записи?

Итак, лемма 1 позволяет для произвольной системы счисления путём определённых вычислений установить является ли данная запись правильной или нет. Однако применение её (пример 8) достаточно громоздко. Для конкретных позиционных систем счисления могут быть найдены более простые приёмы. Так для системы счисления (∗∗) докажем следующую теорему.

<u>ТЕОРЕМА 4</u> В системе счисления (∗∗) запись является правильной тогда и только тогда, когда не содержит двух соседних цифр, левая из которых - 9, а правая - больше 3.

Доказательство. Необходимость. Пусть в некоторой записи $\overline{\ldots,\mathbf{s},\mathbf{p},\mathbf{q},\ldots}$ имеет место $\mathbf{p} = 9$ и $\mathbf{q} \geq 4$, причём можно считать, что $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ – первая подобная пара цифр, считая слева. Тогда $0 \leq \mathbf{s} \leq 8$ и, если $\mathbf{p}$ – первая цифра, то примем $\mathbf{s} = 0$. Заметим, что $\overline{\ldots,\mathbf{s}, 9,\mathbf{q},\ldots} = \overline{\ldots,\mathbf{s}+1,0,\mathbf{q}-4,\ldots}$ и, следовательно, первоначальная запись не является правильной.

Достаточность. Пусть $\overline{\mathbf{s}_k,\mathbf{s}_{k-1}, \ldots, \mathbf{s}_1}$ - запись, в которой непосредственно справа от цифры 9 (если эта цифра вообще встречается в записи) могут находиться лишь цифры 0, 1, 2, 3. Методом индукции по $\mathbf{i}$ ($\mathbf{i} = 1, 2, \ldots, \mathbf{k}$) покажем, что $a_{i+1} > \overline{s_i, s_{i-1}, \ldots, s_1}$. <u>База индукции</u>. Если $i = 1$, то $a_2 = 10 > \overline{s_1}$. Если $i = 2$, то $a_3 = 94 > 10 \cdot s_2 + s_1 = \overline{s_2, s_1}$. <u>Шаг индукции</u>. Допустим, что справедливы неравенства: $a_{i-1} > \overline{s_{i-2}, \ldots, s_1}$ и $a_i > \overline{s_{i-1}, s_{i-2}, \ldots, s_1}$, и установим неравенство $a_{i+1} > \overline{s_i, s_{i-1}, \ldots, s_1}$. Действительно, если $9 > s_i$, то $a_{i+1} = 9 \cdot a_i + 4 \cdot a_{i-1} > 9 \cdot a_i > 8 \cdot a_i + \overline{s_{i-1}, s_{i-2}, \ldots, s_1} = \overline{8, s_{i-1}, \ldots, s_1} \geq \overline{s_i, s_{i-1}, \ldots, s_1}$. Если же $9 = s_i$, то $4 > s_{i-1}$ и снова $a_{i+1} = 9 \cdot a_i + 4 \cdot a_{i-1} > 9 \cdot a_i + 3 \cdot a_{i-1} + \overline{s_{i-2}, \ldots, s_1} \geq \overline{s_i, s_{i-1}, \ldots, s_1}$. Таким образом, неравенство $a_{i+1} > \overline{s_i, s_{i-1}, \ldots, s_1}$ доказано для всех i ($i = 1, 2, \ldots, k$) и остаётся воспользоваться леммой 1. ■

<u>Упражнение 4</u>. Рассмотрим позиционную систему счисления, основанную на известной последовательности Фибоначчи: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{i+1} = u_i + u_{i-1}$, где $i = 2, 3, 4, \ldots,$. Докажите, что 1) $p_1^* = p_2^* = p_3^* = \ldots = 1$, 2) запись в этой системе будет правильной тогда и только тогда, когда в ней нет двух единиц рядом.

Вот и обещанная в конце предыдущего параграфа теорема, которая возвратит хорошее настроение.

<u>ТЕОРЕМА 5</u> У больших чисел и правильные записи лексикографически больше.

Доказательство. Пусть в некоторой позиционной системе счисления даны правильные записи двух чисел: $A = \overline{s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1}$ и $B = \overline{u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1}$, причём первая запись лексикографически больше второй. Докажем, что $A > B$, из чего уже будет следовать утверждение теоремы. Действительно, если $k > n$, то $A \geq a_k > \overline{u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1} = B$. Если $k = n$ и $s_i > u_i$ – первая слева пара неравных цифр, то $A = \overline{s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1} \geq \overline{s_k, s_{k-1}, \ldots, s_{i+1}, 0, \ldots, 0} + s_i \cdot a_i \geq \overline{s_k, s_{k-1}, \ldots, s_{i+1}, 0, \ldots, 0} + u_i \cdot a_i + a_i > \overline{s_k, s_{k-1}, \ldots, s_{i+1}, 0, \ldots, 0} + u_i \cdot a_i + u_{i-1} \cdot a_{i-1} + \ldots + u_1 \cdot a_1 = \overline{u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1} = B$. Отметим лишь, что неравенство $a_i > u_{i-1} \cdot a_{i-1} + \ldots + u_1 \cdot a_1$ установлено в лемме 1. ■

Итак, по правильным записям чисел действительно очень легко узнать какое из чисел больше. Но как находить правильные записи чисел?

<u>Алгоритм поиска правильных записей</u>. Пусть A – данное натуральное число. ***Шаг первый***. Найдём a_k так, чтобы $a_k \leq A < a_{k+1}$. Для себя отметим, что в искомой правильной записи должно быть точно k цифр.

Шаг второй. Разделим A на a_k с остатком, т.е. запишем равенство $A = a_k \cdot q + r$, где $0 \leq r < a_k$. Выберем первую цифру s_k искомой правильной записи: $s_k = q$ (почему $q \leq p_k^*$?).

Шаг третий. Если $r = 0$, то $\overline{s_k, 0, \ldots, 0}$ – искомая правильная запись A.

В противном случае применим данный алгоритм для нахождения правильной записи числа **r** (она будет содержать менее **k** цифр!), а затем запишем её на местах нулей (выравнивая справа) в приведённой выше записи $\overline{s_k, 0, \dots, 0}$.

Пример 9. В системе счисления (**) применим алгоритм к числу A=1802.

Шаг первый: $a_4 = 886 \le 1802 < a_5 = 8350$, т.е. в правильной записи A должно быть точно 4 цифры.

Шаг второй: разделим 1802 на $a_4 = 886$ с остатком: $1802 = 886 \cdot 2 + 30$, следовательно, 2 - первая цифра в правильной записи A. Теперь аналогично поступим с числом 30.

Шаг первый: $a_2 = 10 \le 30 < a_3 = 94$, т.е. в правильной записи 30 точно 2 цифры.

Шаг второй: разделим 30 на $a_2 = 10$ с остатком: $30 = 10 \cdot 3 + 0$. Следовательно, $\overline{3,0}$ - правильная запись числа 30. И, наконец, $\overline{2,0,3,0}$ - правильная запись A.

ТЕОРЕМА 6 Приведённый выше алгоритм позволяет получить для любого натурального числа его правильную запись за конечное число шагов.

Доказательство. Сохраним обозначения из алгоритма. Ввиду неравенства $A < a_{k+1}$, очевидно, что никакая запись A в системе счисления (**) не может иметь более **k** цифр. Если допустить, что $q = 0$, то получим противоречие: $a_k \le A = r < a_k$. Таким образом, в правильной записи A имеется точно **k** цифр. Далее, если $q \le p_k^*$, то $s_k = q$ - единственная, ввиду леммы 1, возможность для первой (слева) цифры в правильной записи A.

Теперь давайте допустим, что $q > p_k^*$, т.е. $q \ge p_k^* + 1$. Рассмотрим правильную запись $A = \overline{s_k, s_{k-1}, \dots, s_1}$ и очевидные неравенства: $A \ge a_k \cdot q \ge a_k \cdot (p_k^* + 1) \ge$ $\ge a_k \cdot (s_k + 1) \ge a_k \cdot s_k + a_k >$ (лемма) $a_k \cdot s_k + \overline{s_{k-1}, \dots, s_1} = A$ - пришли к противоречию.

Наконец, завершение алгоритма за конечное число шагов следует из того, что после ***шагов*** 1 и 2 процесс заканчивается (если $r = 0$) или предстоит искать правильную запись для меньшего числа чем прежде ($r < a_k \le A$). ■

Упражнение 5. Докажите, что следующий алгоритм позволяет в системе (**) перейти от произвольной записи к правильной:

Шаг первый: просматриваем запись слева направо, пока не встретим первую первую пару соседних цифр: $s_i = 9, s_{i-1} \ge 4$ после чего переходим ко второму шагу. В противном случае правильная запись уже получена.

Шаг второй: Заменим три цифры в записи следующим образом: $\overline{\dots, s_{i+1}, 9, s_{i-1}, \dots} = \overline{\dots, s_{i+1}+1, 0, s_{i-1}-4, \dots}$ (если $s_i = 9$ – первая цифра, то полагаем $s_{i+1} = 0$). Возвращаемся в начало.

А сейчас давайте поговорим о первых применениях позиционных систем счисления к решению задач.

Следствие 1 Правильная запись числа $\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1}-1$ содержит $\mathbf{n}$ цифр и является наибольшей среди всех правильных записей, содержащих $\mathbf{n}$ цифр.

В десятичной системе счисления приходим к известному равенству:
$10^{\mathbf{n}}-1=\underbrace{999...999}_{\mathbf{n}}=9\cdot10^{\mathbf{n}-1}+9\cdot10^{\mathbf{n}-2}+.....+9$ или $10^{\mathbf{n}-1}+10^{\mathbf{n}-2}+.....+1=\frac{10^{\mathbf{n}}-1}{9}$.

В системе (**) следствие 1 выглядит, ввиду теоремы 4, менее привычно: $\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1}-1=9\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{n}}+3\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}+9\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{n}-2}+3\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{n}-3}+.....$, причём последнее слагаемое равно $3\cdot\mathbf{a}_1$ при чётном $\mathbf{n}$, и равно $9\cdot\mathbf{a}_1$ при нечётном $\mathbf{n}$. Выпишем ещё одно равенство для $\mathbf{a}_{\mathbf{n}}-1$, а затем сложим оба равенства (соответственно вычтем второе из первого). После очевидных преобразований получим:
$\mathbf{a}_{\mathbf{n}}+\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}+.....+\mathbf{a}_1=\frac{\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1}+4\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{n}}-2}{12}$ и соответственно $\mathbf{a}_{\mathbf{n}}-\mathbf{a}_{\mathbf{n}-1}+\mathbf{a}_{\mathbf{n}-2}-.....+(-1)^{\mathbf{n}-1}\cdot\mathbf{a}_1=$
$=\frac{\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1}-4\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{n}}}{6}$. Таким образом, найдены сумма и знакочередующаяся сумма $\mathbf{n}$ первых членов последовательности (**), с другой стороны показано, что для каждого натурального $\mathbf{n}$ выражение $\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1}+4\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{n}}-2$ делится на 12 без остатка, а выражение $\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1}-4\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{n}}$ делится на 6 без остатка.

Упражнение 6. Для членов последовательности Фибоначчи (упражнение 4) доказать 1. $\mathbf{u}_{\mathbf{n}+1}-1=\mathbf{u}_{\mathbf{n}}+\mathbf{u}_{\mathbf{n}-2}+\mathbf{u}_{\mathbf{n}-4}+\ldots$; 2. $\mathbf{u}_{\mathbf{n}+2}-2=\mathbf{u}_{\mathbf{n}}+\mathbf{u}_{\mathbf{n}-1}+\ldots+\mathbf{u}_1$;
3. $\mathbf{u}_{\mathbf{n}-1}=\mathbf{u}_{\mathbf{n}}-\mathbf{u}_{\mathbf{n}-1}+\mathbf{u}_{\mathbf{n}-2}-\mathbf{u}_{\mathbf{n}-3}+\ldots+(-1)^{\mathbf{n}-1}\cdot\mathbf{u}_1$.

К следствию 1 вернёмся в следующем параграфе, а сейчас ещё одно применение позиционных систем счисления, обобщающее известный признак делимости на 9.

Следствие 2 Пусть d – общий делитель всех чисел $\mathbf{a}_2-1$, $\mathbf{a}_3-1$, $\mathbf{a}_4-1, \ldots$. Произвольное число M делится на d тогда и только тогда, когда сумма цифр M делится на d.

Доказательство. Преобразуем запись M в данной позиционной системе счисления $M=\overline{\mathbf{s}_{\mathbf{k}},\mathbf{s}_{\mathbf{k}-1},\ldots,\mathbf{s}_1}=\mathbf{s}_{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{k}}+\mathbf{s}_{\mathbf{k}-1}\cdot\mathbf{a}_{\mathbf{k}-1}+\ldots+\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{a}_1=$
$=[\mathbf{s}_{\mathbf{k}}\cdot(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}-1)+\mathbf{s}_{\mathbf{k}-1}\cdot(\mathbf{a}_{\mathbf{k}-1}-1)+\ldots+\mathbf{s}_2\cdot(\mathbf{a}_2-1)]+(\mathbf{s}_{\mathbf{k}}+\mathbf{s}_{\mathbf{k}-1}+\ldots+\mathbf{s}_1)$. По условию выражение в квадратных скобках делится на d, из чего непосредственно вытекает доказываемое утверждение. Отметим, что в доказательстве не использовались правильные записи. ■

В десятичной системе счисления в качестве d можно рассматривать 3 и 9, т.к. 3 и 9 являются общими делителями всех чисел: $10-1$, 10^2-1, $10^3-1, \ldots$.
В системе счисления (**) в качестве d можно принять 3, т.к. только 3 является общим делителем всех чисел: $\mathbf{a}_2-1=9$, $\mathbf{a}_3-1=93$, ...

Упражнение 7 Для позиционной системы счисления (**) доказать, что 1. $a_{2000}-1$ делится без остатка на 9; 2. $a_{2001}-4$ делится без остатка на 9.

4. ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ.

Позиционную систему счисления будем называть правильной, если каждое натуральное число имеет в ней единственную запись, которая очевидно является правильной. Ниже в этом параграфе получим критерий для правильных систем счисления, из которого с лёгкостью будет следовать в частности, что привычная нам десятичная система счисления является правильной. Если число $\mathbf{a}$ делится без остатка на число $\mathbf{b}$, то будем записывать это так $\mathbf{a} \vdots \mathbf{b}$.

ЛЕММА 2 Если существует натуральное число $\mathbf{n}$ такое, что $a_n \vdots a_{n-1}$, $a_{n-1} \vdots a_{n-2}$, ..., $a_2 \vdots a_1$, то справедливы равенства $p_n^* = p_n$, $p_{n-1}^* = p_{n-1}$, … , $p_1^* = p_1$.

Доказательство. 1. Ввиду теоремы 2, имеют место равенства $p_1 = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$, $p_2 = \frac{a_3 - a_2}{a_2}$, . . . , $p_{n-1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}$, и, следовательно, $p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_{n-1} \cdot a_{n-1} = a_n - 1$. С другой стороны $p_1^* \cdot a_1 + p_2^* \cdot a_2 + \ldots + p_{n-1}^* \cdot a_{n-1} \geq a_n - 1$ согласно построению чисел $p_1^*, p_2^*, \ldots$ в параграфе 1, и $p_k^* \leq p_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) по теореме 3. Таким образом, приходим к цепочке равенств - неравенств: $a_n - 1 = p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_{n-1} \cdot a_{n-1} \geq$ $\geq p_1^* \cdot a_1 + p_2^* \cdot a_2 + \ldots + p_{n-1}^* \cdot a_{n-1} \geq a_n - 1$, т.е. доказано, что $p_{n-1}^* = p_{n-1}$, … , $p_1^* = p_1$.

2. Допустим теперь, что $p_n^* \neq p_n$, т.е. $p_n^* = p_n - 1$ (теорема 3). Тогда из неравенства $p_1 \cdot a_1 + \ldots + p_{n-1} \cdot a_{n-1} + (p_n - 1) \cdot a_n \geq a_{n+1} - 1$ получаем $a_n - 1 + (p_n - 1) \cdot a_n \geq a_{n+1} - 1$ и $p_n \cdot a_n \geq a_{n+1}$, что противоречит определению числа p_n (теорема 2). ■

ТЕОРЕМА 7 Позиционная система счисления является правильной тогда и только тогда, когда $a_{n+1} \vdots a_n$, для каждого натурального числа $\mathbf{n}$.

Доказательство. 1. Пусть a_{n+1} не делится на a_n для некоторого числа $\mathbf{n}$. По определению числа p_n (теорема 2) имеют место неравенства $0 < a_{n+1} - p_n \cdot a_n \leq$ $\leq a_n$, причём $a_{n+1} - p_n \cdot a_n \neq a_n$ (т.к. a_{n+1} не делится на a_n). Следовательно, существует обобщённая запись $a_{n+1} - p_n \cdot a_n = \overline{s_{n-1}, \ldots, s_1}$. Таким образом, число a_{n+1} обладает двумя записями: $a_{n+1} = \overline{1, 0, 0, \ldots, 0}$ и $a_{n+1} = \overline{p_n, s_{n-1}, \ldots, s_1}$.

2. Пусть теперь $a_{n+1} \vdots a_n$, для каждого натурального числа $\mathbf{n}$. Ввиду леммы 2, для каждого числа $\mathbf{n}$ справедливы равенства $p_n^* = p_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}$. Далее, для произвольной обобщённой записи $\overline{s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1}$ имеют место $\overline{s_n, s_{n-1}, \ldots, s_1} \leq \overline{p_n^*, p_{n-1}^*, \ldots, p_1^*} = \overline{p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1} = p_n \cdot a_n + p_{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + p_1 \cdot a_1 = a_{n+1} - 1 <$ $< a_{n+1}$. В силу леммы 1 из параграфа 3 заключаем, что каждая запись является правильной и, следовательно, единственной. ■

<u>Следствие 3</u>. В правильной системе счисления для каждого натурального $\mathbf{n}$ справедливо равенство $\mathbf{a}_{n+1} = (\mathbf{p}_n + 1)\cdot\mathbf{a}_n$.

Перемножив эти равенства, получим: $\mathbf{a}_{n+1} = (\mathbf{p}_n + 1)\cdot(\mathbf{p}_{n-1} + 1)\cdot(\mathbf{p}_{n-2} + 1)\cdot \ldots\ldots \cdot(\mathbf{p}_1 + 1)$. Сложим равенства из следствия **3**: $\mathbf{a}_{n+1} - 1 = \mathbf{p}_n\cdot\mathbf{a}_n + \mathbf{p}_{n-1}\cdot\mathbf{a}_{n-1} + \ldots\ldots + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{a}_1$ или с учётом предыдущего равенства: $(\mathbf{p}_n + 1)\cdot(\mathbf{p}_{n-1} + 1)\cdot \ldots\ldots\cdot(\mathbf{p}_1 + 1) - 1 = \mathbf{p}_n\cdot(\mathbf{p}_{n-1} + 1)\cdot(\mathbf{p}_{n-2} + 1)\cdot \ldots\ldots \cdot(\mathbf{p}_1 + 1) + \mathbf{p}_{n-1}\cdot(\mathbf{p}_{n-2} + 1)\cdot \ldots\ldots \cdot(\mathbf{p}_1 + 1) + \ldots\ldots + \mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{p}_1 + 1) + \mathbf{p}_1$ - снова встретились с равенством из следствия 1.

<u>Пример 10</u>. В факториальной системе счисления: $\mathbf{a}_n = 1\cdot 2\cdot \ldots\ldots\cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}!$, $\mathbf{p}_n = \mathbf{n}$. По теореме **7** факториальная позиционная система является правильной**.** Следовательно, справедливо равенство $(\mathbf{n}+1)! - 1 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}! + (\mathbf{n}-1)\cdot(\mathbf{n}-1)! + (\mathbf{n}-2)\cdot(\mathbf{n}-2)! + \ldots\ldots 1\cdot 1!$.

<u>Упражнение 8</u>**.** Позиционная система счисления является правильной тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_{n+1} - 1 = \mathbf{p}_n\cdot\mathbf{a}_n + \mathbf{p}_{n-1}\cdot\mathbf{a}_{n-1} + \ldots\ldots + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{a}_1$ для каждого натурального **n.**

<u>Упражнение 9</u>**.** Рассмотрите позиционную систему $\mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{a}_n = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots\ldots \cdot(2\mathbf{n}-2)$, где $\mathbf{n}=2,3,\ldots.$ Докажите числовое равенство

$$2^{\mathbf{n}}\cdot \mathbf{n}! - 1 = (2\mathbf{n}-1)\cdot 2^{\mathbf{n}-1}\cdot(\mathbf{n}-1)! + (2\mathbf{n}-3)\cdot 2^{\mathbf{n}-2}\cdot(\mathbf{n}-2)! + (2\mathbf{n}-5)\cdot 2^{\mathbf{n}-3}\cdot(\mathbf{n}-3)! + \ldots\ldots + 1\cdot 2^{0}\cdot 0!\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] И.М.Яглом, И.М.Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении.

[2] В.А.Кречмар, Задачник по алгебре. “Наука”, Москва, 1964.

[3] С.В.Фомин, Системы счисления. Из серии “Популярные лекции по математике”, выпуск 40.

[4] Н.Н.Воробьёв, Числа Фибоначчи. Из серии “Популярные лекции по математике”, выпуск 6.