ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЧИСЛОВЫХ ТАБЛИЦ

Шлейфер Ф.Г.

Немного истории. В 1963 году на московской олимпиаде была предложена следующая задача. В квадратную таблицу 9×9 записаны попарно различные целые числа. Числа называются соседними, если они находятся в двух соседних клетках таблицы, т.е. в клетках с общей стороной. Показать, что найдутся два соседних числа с разностью большей или равной 6.

Решение основывалось на принципе Дирихле и заключалось в том, чтобы сначала выделить наименьшее и наибольшее числа в таблице, разность их больше или равна 80. Затем указать путь между ними, который проходит по соседним клеткам и содержит не более 17 клеток, включая выделенные. Тогда хотя бы при одном переходе на данном пути разность соседних чисел будет больше или равна 80/16=5. Откуда же возьмётся разность 6? Если допустить, что разности 6 нет, то получим, что наименьшее и наибольшее числа находятся в противоположных угловых клетках и на всём пути все разности равны 5. Но путей-то существует много, а значит не могут все разности на этих путях быть равными 5.

Можно предположить, что число 6 не является лучшей оценкой для таблиц 9×9. Но какая она? Легко видеть, что эта оценка не превышает 9, т.к. можно заполнить таблицу числами от 1 до 81, сначала записав по порядку числа в первую строку, затем – во вторую и т.д. Об этой задаче мне рассказал руководитель математического кружка (А.М.Кауфман, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Рязанского пединститута). Он добавил, что никто не знает лучшей оценки даже для таблицы 9×9. И вот я многократно возвращался к этой задаче, но решения не было. Через какое-то время догадался, что для таблицы 9×9 лучшей оценкой является 9. Но догадка – это не доказательство! Доказательство я увидел перед сном, в комнате было темно, все уже спали. И произошло это летом 1965 года в ночь перед письменным экзаменом на мехмат МГУ. В 1970 году начал выходить журнал «Квант», и в конце августа 1971 г. я решился отнести туда рукопись. В декабре 1971 в «Кванте» было опубликовано другое решение этой задачи. Ответа я вообще не получил. Ниже приведу моё решение.

1. Пусть A – квадратная таблица размеров n×n, заполненная попарно различными целыми числами. Среди разностей соседних чисел выберем наибольшую и будем её обозначать s(A), и называть критической разностью данной таблицы A. На первом этапе (их всего два) основной идеей является "упорядочить" таблицу, причём так, чтобы критическая разность не возросла.

1a. Заменим все числа таблицы на числа $1,2,3,....,n^2$. Делать это будем так. Если x − наименьшее число в таблице, то отнимем от всех чисел число $(x-1)$. При этом разности соседних чисел не изменятся, а наименьшим числом в таблице будет 1. Пусть уже в таблице имеются числа $1,2,...,k$, а наименьшим среди остальных чисел является t $(k+1<t)$. Тогда отнимем от всех чисел, начиная с t число $t-k-1$. Заметим, что вместо t будет стоять число $k+1$, и разности соседних чисел не возрастут, следовательно, не возрастёт и критическая разность.

1b. Во всех столбиках таблицы переставим все числа в порядке возрастания. Во-первых, в каждом столбике максимальная для него разность соседних чисел не может возрасти. Если Вам это очевидно, пропустите следующий абзац.

Пусть после перестановки чисел в столбике появились соседние числа $b<c$ с "большой разностью". Разобъём все числа столбика на две части: B={все числа данного столбика, меньшие или равные b} и C={все числа данного столбика, большие или равные c}. Все числа столбика попадут либо в B, либо в C, т.к. в столбике нет чисел из промежутка (b,c). Так вот, и до перестановки числа из B и C каким-то образом соседствовали, причём в этом месте разность должна быть по меньшей мере $c-b$ или больше.

Во−вторых, новые разности соседних чисел по строкам также не превысят наибольшей из прежних разностей. И это уже не очевидно. Чтобы это доказать, рассмотрим содержимое двух первых (соседних) столбиков после перестановки: $b_1<b_2<....<b_n$ и $c_1<c_2<....<c_n$. И пусть наибольшая разность для пар соответствующих чисел: c_k-b_k. Рассмотрим множество чисел $B=\{b_1,b_2,....,b_k\}$ из первого столбика и множество чисел $C=\{c_k,c_{k+1},....,c_n\}$ из второго столбика. Так как в обоих множествах вместе имеется более n чисел, то какие-то их члены (один из B и один из C) были соседними до перестановки, и разность их равна c_k-b_k или больше. Вот и всё.

После упорядочивания чисел по столбикам ничто нам не мешает упорядочить их по строкам. Затем снова упорядочим по столбикам, и снова по строкам и т.д. до конца, т.е. до момента, когда упорядочивать уже нечего. А наступит ли конец? Различных таблиц, заполненных числами от 1 до n^2, хоть и много, но не более $(n^2)!$. Следовательно, ещё нужно рассмотреть ситуацию с циклом. Пусть некоторая цепочка преобразований таблицы (о которых говорили выше) приводит к таблице, которая уже была в начале. Рассмотрим самое маленькое число d, которое хоть раз участвует в цепочке преобразований (т.е. перемещается). Заметим, что каждое преобразование либо вообще не затрагивает d, либо передвигает его вверх или влево, но никогда назад! Тогда как же d сможет вернуться на первоначальное место? Всё, получили "упорядоченную" таблицу. С ней и будем иметь дело в пункте 2.

2. В "упорядоченной" таблице для каждого числа f ($1<f\le n^2$) можно нарисовать непрерывную линию−границу по сторонам клеток так, что все числа меньшие f окажутся по одну её сторону, а большие f и само f − по другую. Причём, если пройтись по звеньям границы из конца в конец, то путь будет идти либо вверх и направо, либо вниз и налево. Обозначим левый нижний конец границы через L, а правый верхний конец − через R.

Пусть теперь f пробегает все числовые значения от 2 до n^2. Как будут себя вести концы границы L и R? Легко видеть, что они будут "лениво" двигаться: L сначала вниз и затем вправо, R сначала вправо и затем вниз. Что значит "лениво"? А то, что при некоторых изменениях f концы границы вообще могут не двигаться, а при других изменениях f будет двигаться только один из концов, причём на длину стороны клетки. Следовательно, при увеличении f можно засечь момент, когда L и R окажутся на противоположных краях таблицы. Примем для определённости, что L и R оказались на левом и, соответственно, правом краях таблицы. Тогда мы увидим ровно n пар вертикально соседних чисел, разделённых границей. Выпишем в порядке возрастания числа из этих пар, лежащие выше (ниже) границы: $a_1<a_2<....<a_n$ ($b_1<b_2<....<b_n$). По определению границы имеет место неравенство $a_n<f=b_1$. Обозначим через b_i − число, стоящее под a_1, тогда $n-1 \le a_n-a_1<f-a_1 \le b_i-a_1$, т.е. $n \le b_i-a_1$. Итак, доказано, что $n \le s(A)$.

3. В благодарность за Ваше терпение Вам положен бонус: приведу и докажу ещё один факт. А именно, если s(A)=n, то в таблице можно найти не менее 2n−2 пар соседних чисел с разностью n. Изложенный метод позволяет это сделать. Сначала вернёмся к пункту 1 и проверим, что та экзекуция, которой мы подвергаем таблицу, не приводит к увеличению количества критических разностей равных n. Для пункта 1a это очевидно. Почему это также верно для пункта 1b? Потому что, получив новую критическую разность (они обозначались через c−b и c_k-b_k), заключаем, что она имела место и до перестановки (т.е числа c и b, а также числа c_k и b_k были соседними и до перестановки). Итак, таблица уже “упорядоченная”. Теперь дело за малым (за пунктом 2). Отметим сначала, что ни при каком положении границы к ней не могут примыкать с одной стороны более n клеток, т.к. это сразу бы приводило к разности большей n. Выше мы договорились, что L и R попадают на левый и, соответственно, правый края таблицы. Пусть впервые это происходит для числа f и в последний раз – для числа q. Обозначим соответствующие границы через Γ_1 и Γ_2, а диагональ таблицы, соединяющую левый нижний угол с правым верхним – Д. Отметим, что n пар вертикально соседних чисел, разделённых каждой из границ Γ_1 и Γ_2 дают разности равные n. Но вполне может оказаться, что некоторые их этих пар совпадают. Наша цель

показать, что вся граница $Г_1$ ($Г_2$), кроме единственного звена примыкающего к правому (левому) краю таблицы, находится выше (соответственно ниже) Д. Во-первых, в $Г_1$ и $Г_2$ не могут встретиться два соседних вертикальных звена, т.к. это сразу привело бы к n+1 клеткам, примыкающим к границе (n вертикально соседних клеток имеются для $Г_1$ и $Г_2$). Во-вторых, второе звено (от R) в $Г_1$ и второе звено (от L) в $Г_2$ являются горизонтальными. Допустим, что второе звено в $Г_1$ вертикальное. Согласно определению числа f, конец R границы для числа f–1 находится на верхнем крае таблицы (в частности, число f–1 находится в правом верхнем углу таблицы). Причём к этой границе примыкают снизу более n клеток – противоречие. Доказательство для $Г_2$ аналогично. Итак, показали, что все звенья границы $Г_1$ ($Г_2$), кроме единственного звена, примыкающего к правому (левому) краю таблицы, находятся выше (соответственно ниже) Д. Таким образом, можно указать n–1 пар вертикально соседних чисел с разностью n, разделённых границей $Г_1$, причём в каждой паре есть число, которое находится выше Д. Аналогично можно указать n–1 пар вертикально соседних чисел с разностью n, разделённых границей $Г_2$, причём в каждой паре есть число, которое находится ниже Д. Уф!